Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГОТОВИМСЯ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

7–8 КЛАССЫ

РОСТОВ-на-ДОНУ
Феникс
2010

www.phoenixbooks.ru

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б 20

Балаян Э.Н.

Б 20 Готовимся к олимпиадам по математике. 7–8 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2010. — 218, [2] с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-17326-8

В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня сложности для учащихся 7–8 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, признаки делимости, инварианты, решения уравнений в целых числах, принцип Дирихле, задачи на проценты, числовые ребусы и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, вызывающие повышенный интерес не только у школьников, но и у взрослых читателей.

Пособие адресовано ученикам 7–8 классов общеобразовательных школ, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, студентам — будущим учителям математики, работникам центров дополнительного образования, а также всем любителям математики.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-222-17326-8

© Балаян Э.Н., 2010
© Оформление: ООО «Феникс», 2010

www.phoenixbooks.ru

Посвящается моим сыновьям —
Николаю и Сергею.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль олимпиад с каждым годом становится все более значимой. Многие вузы стали проводить свои олимпиады с целью выявить наиболее талантливых абитуриентов. Победителей, занявших призовые места, стали освобождать от сдачи экзаменов и зачисляли в вуз.

В связи с этим назрела необходимость в доступной форме ознакомить широкие массы школьников с характером и типом задач, предлагаемых на олимпиадах различного уровня.

В предлагаемой книге представлены задачи разного уровня сложности, причем сделано это сознательно с тем, чтобы каждый участник мог что-то решить из предложенных задач, ибо, если задачи слишком трудны, то школьники теряют со временем интерес не только к олимпиадам, но и к изучению математики.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как по условию, так и по методам решения.

Среди предложенных задач встречаются как нетривиальные, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и более стандартные, которые могут быть решены оригинальным способом.

К числу таких методов можно отнести признаки делимости чисел, делимость и остатки, многочле-

www.phoenixbooks.ru

ны, решение уравнений в целых числах, принцип Дирихле, метод инвариантов, задачи на проценты, логические задачи и др. Эти задачи способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять подобные, а возможно, и более оригинальные задачи, что в итоге приводит со временем к творческим открытиям в различных областях математики.

Автор ставил целью привести наиболее рациональные и красивые решения, доступные школьникам 7–8 классов. Разумеется, школьник может попытаться привести и другие, возможно, более изящные решения.

Книга состоит из трех разделов. В разделе I приводятся условия задач для 7–8 классов. Задачи, отмеченные значком (А), авторские, составленные на протяжении многих лет педагогической деятельности.

В разделе II книги приводятся ответы, краткие указания, а к наиболее трудным — полные решения.

Автор настоятельно рекомендует обращаться к решениям в случае, когда задачи уже решены, или после неоднократных, но безуспешных попыток самостоятельно их решить. Следует иметь в виду, что одна самостоятельно решенная задача принесет значительно больше пользы для развития ума, чем несколько других, данных в книге. Только настойчивость, терпение и выдержка помогут преодолеть все трудности, и тогда непременно придет успех.

Раздел III будет особенно интересен не только школьникам, но и всем любителям математики.

www.phoenixbooks.ru

Он содержит занимательные задачи творческого характера, способствующие развитию мыслительных способностей учащихся. Помимо авторских предложены задачи известных математиков, которые формируют навыки самостоятельной работы и приемы умственной деятельности, такие как анализ, синтез, аналогия, обобщение, и, как следствие, повышают успеваемость учащихся.

Пособие предназначено ученикам 7–8 классов для самостоятельной подготовки к олимпиадам различного уровня, учителям математики, студентам педвузов, а также всем, кто интересуется математикой.

www.phoenixbooks.ru

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

1(А). Найти наименьшую пару натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$2009x - 2008y = 2010.$$

2(А). Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть равно 57, а произведение последней цифры числа на оставшуюся часть равно 105. Найти это число.

3(А). Решить в целых числах уравнение

$$xy = x + y + 4.$$

4(А). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x + 4a - 6 \geqslant 0, \\ 2x - a - 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

5. Сколько существует натуральных чисел, каждое из которых превышает сумму своих цифр на произведение этих цифр?

www.phoenixbooks.ru

6. В турнире по футболу участвовало 7 команд, которые набрали 14, 13, 9, 8, 7, 4 и 3 очка. За победу присуждалось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0 очков. Сколько матчей в турнире закончилось вничью?

7. Решить в натуральных числах уравнение

$$\overline{xxyy} = z^2.$$

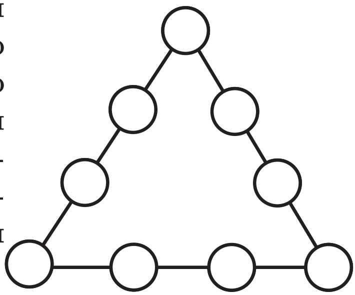
8(А). Верно ли, что число

$$2007 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010 + 1$$

является точным квадратом?

9. Разложить многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на три множителя.

10. Расставить в кружочки треугольника цифры от 1 до 9 так, чтобы на каждой его стороне суммы цифр были одинаковы. При этом суммы квадратов цифр на каждой стороне также должны быть равны.



11(А). Найти действительные корни уравнения

$$(3x^2 - 4x + 7)^{10} + (3x^2 + x - 2)^2(3x^2 - 4x + 7)^2 +$$
$$+ (3x^2 + x - 2)^8 = 0.$$

12(А). Найти сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2009 \cdot 2010}.$$

www.phoenixbooks.ru

13(А). Найти x, если $x^2 = 2009 \cdot 2011 + 1$ и $x < 0$.

14. Решить уравнение $(x+y)^2 = 3(x+3)(x-3)$.

15. Если на каждую палку сядет по 5 галок, то одна галка останется без палки, а если на каждую палку сядет по 6 галок, то одна палка останется пустой. Сколько галок и сколько палок?

16. Грабители угнали 1/3 стада овец и 1/3 овцы. Другая шайка угнала 1/4 оставшихся овец и 1/4 овцы. Затем третья шайка грабителей угнала 1/5 остатка и еще 3/5 овцы, после чего в стаде осталось 409 овец. Сколько овец было в стаде первоначально?

17. Найти наименьшее число, делящееся на 7, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает в остатке 1.

18(А). Имеется 2009 переключателей. Изначально они все включены. Разрешается выбрать любые два и перевернуть их в противоположное положение (выключенные включить, а включенные выключить). Можно ли, проделав несколько раз эту операцию, привести их все во включенное состояние?

19(А). Построить график уравнения $|y|\,y = \dfrac{|x|}{x}$.

20. Найти числа, представляющие собой кубы натуральных чисел и имеющие вид $13p + 1$, где p — простое число.

21. Существуют ли четыре натуральных числа, сумма и произведение которых нечетны?

www.phoenixbooks.ru

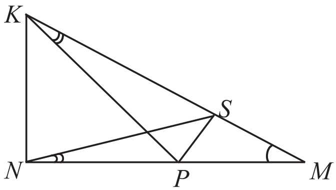
22(А). В равнобедренном ΔMNK $MK = KN = 12$ *дм*, S — середина KN; $P_{\Delta MSN} - P_{\Delta MKS} = 3$ *дм*. Найти MN.

23(А). Решить в целых числах уравнение

$$13x - 15y = 7.$$

24. В классе 27 учеников. Каждый из них написал двум товарищам по записке. Может ли оказаться, что каждый из них получил нечетное число записок?

25. В $\Delta\, KNM$ $\angle N = 90°$, $\angle M = 35°$, $\angle PKS = 10°$, $\angle SNP = 20°$. Найти $\angle PSN$.



26(А). Доказать, что выражение $xy(5x+4)(7y+4)$ можно представить в виде разности квадратов двух целых многочленов с целыми коэффициентами.

27. Решить числовой ребус. Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{БУЛОК} \\ \text{БЫЛО} \end{array} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

28. Решить уравнение $2x + 1 = y^3$ в натуральных числах, где x — простое число.

www.phoenixbooks.ru

Раздел II

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

7 класс

1. Решение. Выразим переменную x через y:

$$x = \frac{2008y + 2010}{2009}. \qquad (1)$$

Выделим целую часть в правой части (1):

$$x = \frac{2009y + 2009 + (1 - y)}{2009} = y + 1 + \frac{1 - y}{2009}.$$

Так как $x \in N$, то $\frac{1 - y}{2009}$ — целое число.

Пусть $\frac{1 - y}{2009} = y_1$, где $y_1 \in N$, тогда $1 - y = 2009y_1$, откуда $y = 1 - 2009y_1$, и $x = y + 1 + y_1 = 2 - 2008y_1$.

Итак, $x = 2 - 2008y_1$, $y = 1 - 2009y_1$.

Очевидно, что при $y_1 = 0$ получим наименьшую пару чисел $(2;\ 1)$, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

2. *Ответ*: 157.

www.phoenixbooks.ru

3. Р е ш е н и е. Так как

$$xy - x - y - 4 = 0, \text{ то } (x-1)(y-1) = 5.$$

Поскольку $5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-5) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-5)$, то получим четыре системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x - 1 = 5, \\ y - 1 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 5; \end{cases}$

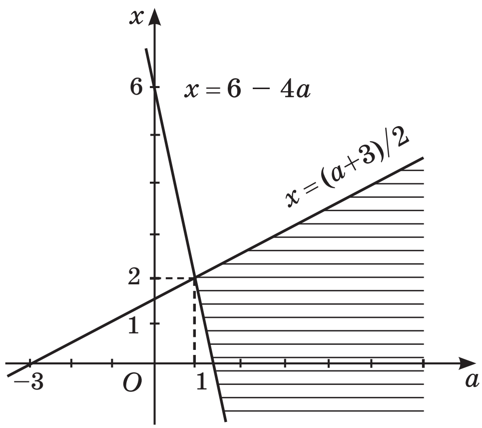
3) $\begin{cases} x - 1 = -5, \\ y - 1 = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -5. \end{cases}$

Следовательно, имеем 4 пары решений.

Ответ: $(6;\ 2), (2;\ 6), (-4;\ 0), (0;\ -4)$.

4. Р е ш е н и е. Выразим из каждого неравенства x через a:

$$\begin{cases} x \geqslant 6 - 4a, \\ x \leqslant \dfrac{a+3}{2}. \end{cases}$$



В координатной системе Oax отметим штриховкой область, заданную указанными неравенствами.

Ответ: при $a < 1$ решений нет;
при $a \geqslant 1$
$x \in [6 - 4a; (a+3)/2]$.

www.phoenixbooks.ru

5. Р е ш е н и е. В таком числе меньше трех цифр, поскольку $\overline{abc} - (a+b+c) = abc$, или $a(99 - bc) = 9b > 0$.

Для двузначного числа имеем: $10a + b - (a+b) = ab$, откуда $b = 9$; $a = 1, 2, 3 \ldots 9$. Всего 9 чисел: 19, 29, 39 ... 99.

Ответ: 9 чисел.

6. Р е ш е н и е. Всего был сыгран $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ матч.

Если бы все закончились победой одной из команд, то сумма очков, набранных всеми командами, была бы равна $21 \cdot 3 = 63$. Но из условия задачи следует, что общая сумма набранных очков равна 58. Поскольку при каждой ничьей всего командам присуждается по одному очку, то из трех очков при ничьей теряется одно. Но всего потерянных очков в турнире будет $63 - 58 = 5$. Значит, 5 матчей закончились вничью.

Ответ: 5.

7. Р е ш е н и е. Имеем $\overline{xx00} + \overline{yy} = z^2$ или $1100x + 11y = z^2$, или $11(100x + y) = z^2$, значит, $z = 11m$, где $m \in N$, тогда $100x + y = 11m^2$ или $x + y = 11(m^2 - 9x)$.

Поскольку $x + y$ делится на 11 и $x \leqslant 9$; $y \leqslant 9$, то $x + y = 11$, тогда $m^2 = 9x + 11$, где $1 \leqslant x \leqslant 9$.

Следовательно, $x = 7$, $m = 8$, $y = 4$, $z = 11m = 88$.

Ответ: $(7;\ 4;\ 88)$.

8. Р е ш е н и е. Пусть $2007 = x$, тогда имеем

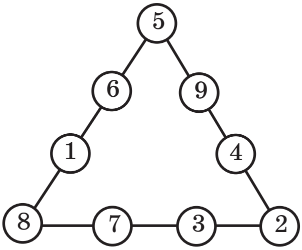
$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

Ответ: верно.

www.phoenixbooks.ru

9. *Ответ*: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$.

10. Решение.



11. Решение. Поскольку все слагаемые неотрицательны, а по условию их сумма равна 0, то это возможно лишь при условии $3x^2-4x+7=3x^2+x-2$, или $5x=9$, $x=1{,}8$.

Ответ: 1,8.

12. Указание. $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

Тогда сумма будет равна $1-\dfrac{1}{2010}=\dfrac{2009}{2010}$.

13. Указание. Ввести замену $a=2010$.

14. Решение. Так как $(x+y)^2=(x+3+y-3)^2=$ $=(x+3)^2+2(x+3)(y-3)+(y-3)^2$, то данное уравнение примет вид $(x+3)^2-(x+3)(x-3)+(y-3)^2=0$.

Полученное равенство возможно лишь при $x+3=$ $=y-3=0$, т. е. при $x=-3$, $y=3$.

Ответ: $x=-3$; $y=3$.

15. Решение. Пусть было x галок и y палок, тогда согласно условию задачи имеем $5y+1=x$ и $6(y-1)=x$. Следовательно, $5y+1=6y-6$, откуда

www.phoenixbooks.ru

$y = 7$, значит, $x = 5 \cdot 7 + 1 = 36$, т. е было 36 галок и 7 палок.

Ответ: 36 галок и 7 палок.

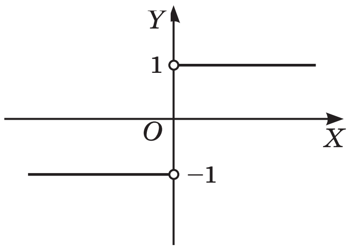
16. *Ответ*: 1025 овец.

17. Решение. Наименьшее число, делящееся на 2, 3, 4, 5, 6 есть 60, значит, искомое число имеет вид $60m + 1$ и одновременно кратно 7. Искомое число 301.

Ответ: 301.

18. Решение. Нельзя. Первоначально включено четное число переключателей (в точности 0), за одну операцию количество включенных переключателей изменяется на четное число. Следовательно, за любое число операций можно изменить количество включенных переключателей лишь на четное число, а 2009 — нечетное.

19. *Ответ*



20. Решение. Согласно условию $x^3 = 13p + 1$ или $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 13p$, значит, $x - 1 = 13$ либо $x^2 + x + 1 = 13$, или $x^2 + x - 12 = 0$, откуда $x_1 = 14$; $x_2 = -4$; $x_3 = 3$. Искомые числа $14^3 = 2744 = 13 \cdot 211 + 1$; $(-4)^3 = -64 = 13 \cdot (-5) + 1$; $3^3 = 27 = 13 \cdot 2 + 1$.

Ответ: 2744; –64; 27.

www.phoenixbooks.ru

21. Решение. Не существуют, так как если произведение нескольких натуральных чисел нечетно, то все эти числа нечетны, а сумма четырех нечетных чисел четна.

22. *Ответ*: 15 дм.

23. *Ответ*: $x = 4 + 15k$; $y = 3 + 13k$, где $k \in z$.

24. Решение. Нет. Допустим, что каждый из учеников получил нечетное количество записок. Так как всего учеников 27 — нечетно, то всеми учениками вместе получено нечетное число записок (сумма нечетного числа нечетных чисел нечетна). С другой стороны, количество полученных записок равно количеству написанных, т. е. $27 \cdot 2 = 54$. Но 54 — четное число. Противоречие.

25. *Ответ*: $45°$.

26. Указание. Преобразовать данное выражение к виду $(5xy + 4y)(7xy + 4x) = A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Далее решить систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 7xy + 4x, \\ A - B = 5xy + 4y \end{cases}$$

и установить, единственное ли это решение.

Ответ: $(6xy + 2x + 2y)^2 - (xy + 2x - 2y)^2$.

27. *Ответ*: $87\,130 + 8213 = 95\,343$.

28. Решение. Поскольку $2x + 1$ нечетно, то y тоже нечетно, т. е. $y = 2a + 1$, где $a \in N$. Имеем $2x + 1 = (2a + 1)^3$, откуда $x = a(4a^2 + 6a + 3)$. Так как x — простое, то $a = 1$, тогда $x = 13$, $y = 3$.

Ответ: $x = 13$; $y = 3$.

www.phoenixbooks.ru

Содержание

www.phoenixbooks.ru

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

ГОТОВИМСЯ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ
7–8 КЛАССЫ

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*
Художник *А. Вартанов*
Корректоры *М. Лепехина, О. Милованова*

Подписано в печать 01.06.2010.
Формат 84×108/32. Бум. тип № 2.
Гарнитура CG Times. Печать офсетная. Усл. п. л. 11,76.
Тираж 2500 экз. Зак. №

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57

www.phoenixbooks.ru