ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. С.М. КИРОВА

И.О. Соловьева

Практикум по решению олимпиадных задач по математике

Учебное пособие

Псков
2010

УДК 51
ББК 22.1, 74.262.21
С 603

Печатается по решению кафедры математического анализа и методики обучения математике ПГПУ им. С.М. Кирова

Соловьева И.О.
С 603 Практикум по решению олимпиадных задач по математике: Учебное пособие. – Псков: ПГПУ, 2010. – 96 с. ISBN 978-5-87854-538-9

В пособии описаны классические идеи решения олимпиадных задач. К этим идеям подобраны примеры задач с решениями и задачи для самостоятельного решения. Пособие содержит 160 задач.

Пособие адресовано студентам математических факультетов педагогических вузов и призвано помочь им в освоении идей и методов решения олимпиадных математических задач, а также в подготовке учащихся к математическим состязаниям школьников. Пособие может быть полезно также учащимся 5-11 классов, интересующимся математикой, учителям математики, которые могут использовать материал книги в индивидуальной работе со способными учениками и, прежде всего, в школьных математических кружках, а также всем любителям математики.

С 603

Печатается в авторской редакции
Рецензенты:
Хватцев А.А. – зав. кафедрой высшей математики Псковского государственного политехнического института, кандидат физ.-мат. наук, профессор
Мартынюк О.И. – доцент кафедры алгебры и геометрии Псковского государственного педагогического университета имени С.М.Кирова, кандидат пед. наук

ISBN 978-5-87854-538-9

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Олимпиадные задачи в математике – термин для обозначения круга задач, для понимания условий и решений которых вполне достаточно знаний школьного курса математики, однако для их решения требуются неожиданные и оригинальные подходы, используются методы, непривычные для школьной практики.

Олимпиадные задачи условно можно подразделить на два класса. Первый содержит задачи, близкие к школьному курсу математики, углубляющие и дополняющие традиционные темы «Делимость чисел», «Многочлены», «Функции», «Уравнения и неравенства», различные разделы геометрии и др. Второй класс включает задачи, которые нельзя, как правило, отнести к определенному разделу математики, для их решения нужно умение рассуждать, догадываться, выстраивать логику доказательства. В решении таких задач зачастую используется некоторый метод или идея, относящаяся к классической олимпиадной тематике. Данное пособие посвящено преимущественно таким задачам и методам их решения.

В пособии описаны классические идеи решения олимпиадных задач. К этим идеям подобраны примеры задач с решениями и задачи для самостоятельного решения. Пособие содержит 160 задач. Все задачи в том или ином смысле «нестандартны» – их решение требует смекалки, сообразительности, а часто и многочасового размышления. Для большинства задач в пособии приведены решения, для наиболее простых – указания и ответы.

Сложность задач существенно различна. Некоторые из них довольно простые, для их решения достаточно смекалки, логики, эти задачи доступны уже учащимся пятых-шестых классов. Другие задачи требуют некоторого опыта, интуиции и наблюдательности, они могут быть сложны и для старшеклассников. Чтобы решить наиболее трудные задачи потребуется умение организовать работу над задачей (прояснить ситуацию, выявить круг идей и др.) и владеть определённой техникой. Большинство задач доступно учащимся 7-9 классов.

Начать работу с пособием рекомендуется со знакомства с советами, данными в разделе «Как решать задачи».

В книге содержится раздел «Виды математических состязаний школьников», в котором рассказывается об олимпиадах и других конкурсах для учащихся, особенностях их подготовки и проведения, специфике задач и др. Материалы этого раздела могут быть использованы для организации внеклассной работы по математике в школе.

Пособие написано на основе опыта, приобретенного автором в процессе работы на протяжении ряда лет в жюри областного (регионального) этапа Всероссийской олимпиады по математике. Большинство задач апробировано в рамках курса «Практикум по решению математических задач», разработанного автором для студентов физико-математического факультета педагогического университета.

Пособие адресовано студентам математических факультетов педагогических вузов и призвано помочь им в освоении идей и методов решения олимпиадных математических задач, а также в подготовке учащихся к математическим состязаниям школьников. Пособие может быть полезно также учащимся 5-11 классов, интересующимся математикой, учителям математики, которые могут использовать материал книги в индивидуальной работе со способными учениками и, прежде всего, в школьных математических кружках, а также всем любителям математики.

Как решать задачи

Решение задач – практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепьяно; научиться ему можно только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь.

Д.Пойа

Осваивать идеи и методы решения задач можно двумя способами: 1) сначала прочитать описание идеи, потом разобрать примеры, потом порешать задачи на эту тему, или 2) сразу начать с задач, чтобы самим уловить идею, а уже потом прочитать комментарии и разобрать примеры.

Решать задачи рекомендуется не «в разбивку», а выбрать сначала определенный цикл и потратить некоторое время на решение задач этого цикла. При этом задачи можно решать не все подряд, а выбирая те, которые вам интересны. Сначала попытайтесь решить задачу самостоятельно, не заглядывая в ответы и решения. После того как задача решена, проверьте свой ответ. Также полезно сверить своё решение с приведённым в книге – кроме проверки правильности своего решения (даже если у вас совпал ответ, решение может быть неверным) вы можете узнать другие подходы к задаче.

Если какая-то задача особенно понравилась, то, решив её, не переходите сразу к следующей, а подумайте еще над этой. Попробуйте понять:

• какие идеи привели к решению, чем эта задача похожа или не похожа на другие задачи;

• где в решении использованы те или иные данные, перестанет ли утверждение быть верным, если какое-то условие убрать или ослабить;

• можно ли данные и ответ поменять местами, т.е. верно ли обратное утверждение;

• можно ли обобщить задачу или вывести интересные следствия.

Не стремитесь решать много задач. Если вы решите за день одну-две задачи и хорошо всё продумаете, то это будет лучше, чем решить десять задач поверхностно. Важно не количество решенных задач, а то новое, что удалось понять. Если у вас после решения хорошей задачи поднимается настроение – это признак успешной работы.

На наш взгляд, при решении задач полезными могут оказаться **советы участнику олимпиады**. Приводим их.

1. Прочитайте условия всех задач и наметьте, в каком порядке вы будете их решать. Учтите, что обычно задачи упорядочены по возрастанию их трудности.

2. Если условие, на ваш взгляд, можно понять разными способами, то не выбирайте самый удобный для себя, а обращайтесь к дежурному с вопросом.

3. Если задача решилась слишком легко – это подозрительно, возможно, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.

4. Если задача не решается – попробуйте её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д.) или порешать ее «от противного», или заменить числа буквами и т.д.

5. Если неясно, верно ли некоторое утверждение, то пытайтесь его поочередно то доказывать, то опровергать (совет А.Н. Колмогорова).

6. Не зацикливайтесь на одной задаче: иногда отрывайтесь от нее и оценивайте положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжать, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).

7. Если устали, отвлекитесь на несколько минут (посмотрите на облака или просто отдохните).

8. Решив задачу, сразу оформляйте решение. Это поможет проверить его правильность и освободит внимание для других задач.

9. Каждый шаг решения надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде нескольких утверждений (лемм). Это помогает при проверке и обсуждении работы.

10. Перед тем как сдать работу, перечитайте её «глазами проверяющих» – смогут ли они в ней разобраться?

Решайте, размышляйте. Желаю успеха!

1. Логические задачи

Логическая задача – термин довольно условный. Без логики не обойтись при решении любой олимпиадной задачи. Однако есть класс задач, которые так называются. Во-первых, это задачи, в которых речь идет об истинных и ложных утверждениях, во-вторых, задачи, в которых присутствуют отрицания каких-либо утверждений, необходимо различать высказывания, относящиеся к какому-либо объекту или к любому объекту (неявно присутствуют кванторы), в-третьих, это задачи, в которых решение основано на переборе возможных вариантов на основе условия задачи (для этого могут использоваться схемы, таблицы и т.д.).

Задача 1. Пять школьников приехали из пяти различных городов в Архангельск на областную математическую олимпиаду. «Откуда вы, ребята?» – спросили их хозяева. Вот что ответил каждый из них:

Андреев: «Я приехал из Онеги, а Григорьев – из Каргополя».

Борисов: «В Каргополе живет Васильев. Я же прибыл из Коряжмы».

Васильев: «Я прибыл из Онеги, а Борисов – из Котласа».

Григорьев: «Я прибыл из Каргополя, а Данилов из Вельска».

Данилов: «Да, я действительно из Вельска, Андреев же живет в Коряжме».

Хозяева очень удивились противоречивости ответов приехавших гостей. Ребята объяснили им, что каждый из них высказал одно утверждение правильное, а другое ложное. Но по их ответам вполне можно установить, кто откуда приехал. Откуда приехал каждый школьник?

Решение. Андреев и Григорьев сказали, что Григорьев из Каргополя. Предположим, что это утверждение верно. Тогда другие их утверждения неверны, Андреев не из Онеги, Данилов не из Вельска. Значит, первое утверждение Данилова ложно, второе истинно, и Андреев живет в Коряжме. Кроме того, первое утверждение Борисова ложно (из Каргополя Григорьев), значит второе утверждение верно: Борисов из Коряжмы. Получилось противоречие: из Коряжмы и Андреев, и Борисов. Значит, предположение о том, что Григорьев из Каргополя неверно.

Рассмотрим тогда вариант, что Григорьев не из Каргополя. Тогда из двух высказываний Андреева верно, что он из Онеги, а из высказываний Григорьева следует, что Данилов из Вельска. Так как Васильев не из Онеги (из Онеги Андреев), то Борисов из Котласа (первое утверждение ложно, второе – истинно), а из слов Борисова ясно, что в Каргополе живет Васильев. Таким образом, получаем: Андреев из Онеги, Борисов из Котласа, Васильев из Каргополя, Григорьев из Коряжмы, Данилов из Вельска. ■[1]

Примечание. Решать задачи такого типа будет легче, если условие оформить в таблице. Поскольку из условия сразу не ясно, какое утверждение истинно, а какое ложно, обозначим утверждения одного школьника одинаковыми цифрами:

	Онега	Каргополь	Коряжма	Котлас	Вельск
Андреев	1		5		
Борисов			2	3	
Васильев	3	2			
Григорьев		1, 4			
Данилов					4, 5

Из таблицы видно, что начать рассуждение лучше всего с рассмотрения утверждения о том, что Григорьев из Каргополя.

Рассмотрим решение задачи «о лгунах».

Задача 2. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал туземца узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген». Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

Решение. Встреченный островитянин мог ответить только «Я – абориген» (это правда для аборигена и ложь для пришельца). Проводник, повторивший его ответ, является аборигеном. ■

К логическим можно отнести задачи «на переправы». В качестве примера рассмотрим классическую задачу такого вида.

[1] символом ■ в пособии обозначается окончание решения.

Задача 3. Может ли крестьянин перевезти через реку волка, козу и капусту, если в лодку вместе с ним помещается только или волк, или коза, или капуста, причем нельзя оставить без присмотра ни волка с козой, ни козу с капустой?

Решение. Может. При первой переправе нужно перевезти козу, при второй – волка (или капусту), при возвращении нужно взять с собой козу (ее нельзя оставить ни с волком, ни с капустой), оставив козу на берегу, перевезти капусту (или волка), после чего вернуться за козой. ■

Задачи.

4. Один из попугаев A, B, C всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий хитрец – иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос «Кто B?» они ответили:

A: – Лжец.

B: – Я хитрец!

C: – Абсолютно честный попугай.

Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

5. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. На следствии каждый из них сделал два заявления.

Браун: «Я не делал этого. Смит сделал это».

Джонс: «Смит невиновен. Браун сделал это».

Смит: «Я не делал этого. Джонс не делал этого».

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой – дважды сказал правду, третий – один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

6. В тетради написано 100 утверждений: «В этой тетради ровно 1 ложное утверждение»; «В этой тетради ровно 2 ложных утверждения»; …; «В этой тетради ровно 100 ложных утверждений». Какое из этих утверждений верно?

7. – У Вовы больше тысячи книг, – сказал Ваня.

– Нет, книг у него меньше тысячи, – возразила Аня.

– Одна-то книга у него наверняка есть, – сказала Маня.

Если истинно только одно из этих утверждений, сколько книг у Вовы?

8. В конференции участвовало 100 человек – химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого

больше среди остальных участников – химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника, и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервали. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

9. Жители города A говорят только правду, жители города B – только ложь, а жители города C – попеременно правду и ложь (то есть из каждых двух высказанных ими утверждений одно истинно, а другое – ложно). В пожарную часть сообщили по телефону: «У нас пожар, скорее приезжайте!» «Где?» – спросил дежурный по части. «В городе C», – ответили ему. Дежурный смог определить, в какой город должна приехать пожарная машина, через час пожар был потушен. В каком городе был пожар?

10. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

11. На доске через запятую было написано несколько натуральных чисел, причём разность любых двух соседних чисел равна одному и тому же числу. Коля заменил в этой записи разные цифры разными буквами, а одинаковые цифры — одинаковыми буквами. Восстановите исходные числа, если на доске написано Т, ЕЛ, ЕК, ЛА, СС.

12. В словосочетании из двух слов каждую букву заменили ее номером в алфавите: 15618191862610141331718162136441. Какое словосочетание зашифровано?

13. Математик пошел к приятелю в гости, но забыл номер его квартиры. Он знал, что:

– если верно, что номер квартиры кратен двум, то он больше, чем 50, но меньше, чем 59;
– если верно, что этот номер не кратен трем, то он больше, чем 60, но меньше, чем 69;
– если верно, что этот номер не кратен четырем, то он больше, чем 70, но меньше, чем 79.

Можно ли по этим данным вычислить номер квартиры?

14. К берегу Нила подошла компания из шести человек: три бедуина, каждый со своей женой. У берега находится лодка с вёс-

лами, которая выдерживает только двух человек. Бедуин не может допустить, чтобы его жена находилась без него в обществе другого мужчины. Может ли вся компания переправиться на другой берег?

15. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама – за 2, малыш – за 5, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Нельзя: двигаться по мосту без фонарика, светить издали, носить друг друга на руках, кидать фонарик).

16. Троим мудрецам завязывают глаза и говорят, что каждому из них на голову надели один из пяти колпаков, среди которых два зеленых и три красных. Затем глаза развязывают и просят, глядя на двух других мудрецов, определить цвет своего колпака. Все три колпака были красные. Через несколько минут один мудрец дал правильный ответ. Как он установил цвет своего колпака?

2. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле[1] имеет несколько формулировок. Наиболее простая следующая: «Если пять кроликов сидят в двух клетках, то в некоторой клетке сидит не менее трех кроликов». В обобщенной формулировке принцип Дирихле звучит так: «Если в k клетках больше nk кроликов, то хотя бы в одной сидит больше n кроликов». Немного иначе это утверждение формулируется так: «Если n кроликов сидят в k клетках, то найдется клетка, в которой сидит не меньше чем n/k кроликов, и найдется клетка, в которой сидит не больше чем n/k кроликов». Пусть вас не смущает дробное число кроликов: в первой формулировке получится, что в клетке сидит не менее $5/2$ кроликов, значит, не меньше трех.

Принцип Дирихле известен также как принцип голубей и ящиков, когда роль кроликов играют голуби, а клеток – ящики. Это название распространено в английском и некоторых других языках.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

[1] Петер Густав Лежён Дирихле (1805-1859) – немецкий математик, основные труды посвящены теории чисел и математическому анализу. Значительные работы посвящены механике и математической физике.

Проведем доказательство методом от противного для обобщенной формулировки принципа Дирихле. Предположим противное: в каждой клетке сидит не более k кроликов. Тогда всего кроликов не более nk, а их по условию больше nk. Получили противоречие, которое опровергает наше предположение.

Принцип Дирихле кажется очевидным, однако, чтобы его применить, бывает не просто догадаться, что считать кроликами, а что – клетками. Можно дать такой ***совет***: если каждому элементу множества A соответствует ровно один элемент множества B, то элементы A можно назвать кроликами, а элементы B – клетками.

Принцип Дирихле бывает непрерывным: «Если n кроликов съели m кг травы, то какой-то кролик съел не меньше m/n кг и какой-то съел не больше m/n кг» (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего). Заметим, что в этой формулировке кролики играют роль клеток для травы, а трава – роль кроликов, сидящих в клетках.

Рассмотрим примеры решения задач.

Задача 17. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

Решение (метод от противного). Предположим, что такой месяц не найдется. Тогда в каждом из 12 месяцев года отмечают свой день рождения не более трех одноклассников. В этом случае учащихся всего не более $12 \cdot 3 = 36$, что противоречит условию задачи. Наше предположение неверно, значит, найдется месяц, в котором день рождения не менее чем у четырех учеников этого класса. ■

Решение (с использованием принципа Дирихле). Докажем, что такой месяц найдется. Поскольку каждому ученику соответствует ровно один месяц, в котором он родился, то роль «клеток» играют месяцы года (их 12), а роль «кроликов» – учащиеся (их 40). По принципу Дирихле найдется клетка, в которой сидит не менее чем $\frac{40}{12}$ кроликов, т.е. 4 кролика. Следовательно, найдется месяц в году, в котором не менее 4 учащихся класса отмечают свой день рождения. ■

Примечание. Это довольно простая задача. В математической олимпиаде школьников может встретиться задача, в которой доказательство аналогичного факта является лишь частью более сложной задачи. В этом случае, как правило, просто пишут: «согласно принципу Дирихле, найдется месяц в году, в котором не менее 4 учеников класса (в котором всего 40 учащихся) отмечают свой день рождения».

Рассмотрим две более сложные задачи.

Задача 18. В Москве живет около 10 млн. жителей[1], на голове у каждого не более 150 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове.

Решение. Поскольку каждому жителю Москвы соответствует определенное количество волос на голове, то жители будут играть роль зайцев, а количество волос – роль клеток (их 150 001: можно пронумеровать от 0 до 150 001), каждый «кролик» попадает в ту «клетку», которая соответствует количеству волос у него на голове. Поскольку в 150 001 «клетке» сидит более $59 \cdot 150001 = 8850059$ «кроликов», значит хотя бы в одной сидит не менее 60 «кроликов». Следовательно, по принципу Дирихле, в Москве есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове. ■

При решении задачи 18 иногда допускается ошибка: количество возможных вариантов («клеток») считают равным 150 000, забывая о допустимом варианте 0 волос.

Задача 19. В первенстве по футболу участвуют 12 команд, каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Решение. Количество матчей, сыгранное каждой командой, изменяется от 0 (в начале первенства) до 11 (в конце первенства). Если предположить, что к какому-то моменту состязаний все команды сыграли разное количество матчей, то это означает, что одна команда еще не сыграла ни одного матча, вторая – 1, третья – 2, …, двенадцатая – все 11 матчей. Тогда получается, что двенадцатая команда сыграла уже со всеми командами, а первая – ни с одной. Получили противоречие. Следовательно, в любой момент состязаний хотя бы две команды сыграли равное количество матчей. ■

---

[1] Согласно статистическим данным на 1 января 2009 года в Москве проживает 10 миллионов 509 тысяч человек.

Задачи.

20. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

21. В классе учится 22 ученика. а) Докажите, что найдутся два ученика, родившихся в одном месяце. б) Обязательно ли найдутся три таких ученика?

22. В классе 30 учеников. В диктанте Вова сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали одно и то же количество ошибок.

23. Числа от 1 до 10 записали в строчку в произвольном порядке и каждое из них сложили с его порядковым номером. Могли ли все полученные суммы оканчиваться разными цифрами?

24. 15 ребят собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

25. Докажите, что из любых 12 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

26. Докажите, что из любых $n+1$ натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на n.

27. Тридцать студентов с пяти курсов придумали 40 задач для олимпиады, причем однокурсники – одинаковое количество задач, а студенты с разных курсов – разное. Сколько студентов придумали по одной задаче?

28. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

29. В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным способом 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2 м.

30. В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным способом 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{7}$ м.

31. На квадратном столе со стороной 70 см лежит 100 квадратных салфеток со стороной 10 см. Докажите, что в стол можно вбить гвоздь, который проткнет не менее трех салфеток.

32. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из них не параллельны. Докажите, что найдутся две прямые, угол между которыми

меньше 26^0.

33. В сфере радиуса 1 летают 9 мух. Верно ли, что в любой момент времени найдутся две из них, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{3}$?

34. На плоскости отмечено 5 точек с целочисленными координатами. Докажите, что середина по крайней мере одного из соединяющих их отрезков также имеет целочисленные координаты.

35. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

36. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

37. На плоскости отмечена 101 точка, не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красным карандашом проводится прямая. Докажите, что на плоскости существует точка, через которую проходит не менее 11 красных прямых.

38. На Земле океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

3. Процессы и операции

В задачах этой темы описываются некоторые процессы, выполняются некоторые операции. Для решения нужно обнаружить некоторую закономерность. Рассмотрим примеры решения задач.

Задача 39. В колонию, состоящую из двухсот бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем каждый из вирусов и каждая из оставшихся бактерий снова делится пополам и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго или, если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

Решение. Рассмотрим данный процесс шаг за шагом и заполним таблицу:

Время (мин.)	Количество вирусов	Количество бактерий
0	1	200
1	2	$2 \cdot 199$
2	2^2	$2^2 \cdot 198$
3	2^3	$2^3 \cdot 197$
…	…	…
n	2^n	$2^n \cdot (200-n)$
…	…	…
200	2^{200}	$2^{200} \cdot (200-200)$

Таким образом, колония будет существовать ровно 200 минут.

Возможен и другой подход к решению этой задачи. Представим себе, что каждый вирус имеет дело со «своей» колонией бактерий. Тогда к исходу первой минуты на каждый вирус будет приходиться по 199 бактерий, к исходу второй минуты – по 198 и так далее, к исходу 199 минуты – по одной бактерии, к исходу 200 минуты бактерий не останется.

Ответ: колония погибнет через 200 минут. ■

Задача 40. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел из одного столбца или из одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, были неотрицательны.

Решение. Организуем следующий процесс: если сумма чисел, стоящих в какой-то строке (или в каком-то столбце), отрицательна, то у всех чисел этой строки (этого столбца) меняем знаки. После каждого такого шага сумма всех чисел, стоящих в таблице, должна увеличиваться. Так как количество возможных расстановок знаков у чисел в таблице конечно, то процесс будет конечным и приведет к тому, что суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, станут неотрицательными, что и требовалось доказать. ■

К данной теме можно также отнести задачи на переливание (см. задачи 48-52) и на взвешивание (см. задачи 53-59). В этих задачах нужно описать последовательность операций, которая приведет к решению задачи.

Задача 41. Отлейте из цистерны 13 литров молока, пользуясь бидонами емкостью 17 и 5 литров.

Решение. Наберем в 17-литровый бидон 15 л (наливая в 5-литровый бидон и переливая затем в 17-литровый). Затем заполним 5-литровый бидон, перелить сможем в 17-литровый только 2 л, в 5-литровом останется 3 л. Выльем из 17-литрового бидона молоко в цистерну, перельем 3 л в 17-литровый, а затем добавим 10 л (два раза по 5 л), получим требуемые 13 л. ■

Процесс решения задач на переливание можно представить в виде таблицы. Например, решение задачи 41 будет выглядеть следующим образом:

Бидон, 17 л	0	5	5	10	15	15	15	17	3	8	8	**13**
Бидон, 5 л	5	0	5	0	5	0	5	3	5	0	5	0

Задачи.

42. На доске написано число 12. Каждую минуту число умножают или делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

43. Последовательность чисел строится по следующему закону: вслед за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. На первом месте стоит число 7, поэтому на втором месте стоит число 14 ($7^2 = 49,\ 4+9+1=14$). На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2010-м месте?

44. Вокруг города Зурбагана проходит кольцевая дорога. Все улицы начинаются и заканчиваются только на этой дороге, и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение на всех улицах и на кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы один из микрорайонов города можно объехать по правилам.

45. В каждом из двух сосудов находится по A литров воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во

второй сосуд, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Сколько воды окажется в каждом из сосудов после ста переливаний?

46. В парламенте у каждого есть не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

47. Поток студентов пять раз сдавал один и тот же зачет (не сумевшие сдать зачет приходили на следующий день). Каждый день успешно сдавали зачет треть всех пришедших студентов и еще треть студента. Каково наименьшее число студентов, так и не сдавших зачет за пять раз?

48. Имеются два ведра: одно емкостью 4 литра, другое – 9 литров. Можно ли набрать из реки ровно 6 литров воды?

49. Можно ли отмерить 8 литров воды, находясь у реки и имея два ведра: одно вместимостью 15 литров, другое – вместимостью 16 литров?

50. Из полного восьмилитрового ведра отмерьте 4 литра с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона.

51. Имеются три бочонка вместимостью 6 ведер, 3 ведра и 7 ведер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну на две части.

52. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?

53. Имеются монеты, одинаковые по внешнему виду. Одна из монет тяжелее остальных. Есть рычажные весы без гирь. Сколько взвешиваний надо сделать для гарантированного нахождения тяжелой монеты, если всего монет а) 21; б) 200; в) n?

54. Имеется 7 внешне одинаковых монет, среди которых 5 настоящих (все одинакового веса) и 2 фальшивых (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить 3 настоящие монеты?

55. Имеется 6 одинаковых по виду монет, 4 из них настоящие, а 2 – фальшивые: обе легче настоящих, но их массы различны. За

три взвешивания на чашечных весах без гирь найдите обе фальшивые монеты.

56. а) Среди 18 монет одна фальшивая, причем фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета (находить фальшивую монету не нужно). б) Условие задачи то же, но монет $n \ (n > 2)$. Найдите наименьшее число взвешиваний.

57. Имеется 4 пакета разной массы и чашечные весы без гирь. Как за 5 взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания массы?

58. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые – они легче, чем остальные и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

59. В ряд выложено восемь внешне одинаковых монет. Вам известно, что монеты с первой по седьмую – фальшивые, а восьмая – настоящая. В Вашем распоряжении чашечные весы без гирь. Как за три взвешивания Вы можете доказать, что монеты с первой по седьмую фальшивые, человеку, который знает только то, что есть сколько-то фальшивых монет, фальшивые монеты весят одинаково и фальшивые монеты легче настоящих?

4. Инварианты и полуинварианты

В задачах, где требуется выяснить, можно ли с помощью заданных операций перейти от одного из объектов к другому (из одной позиции в другую), часто полезно найти «инвариант» – числовую характеристику объектов (или функцию с какими-то другими значениями на множестве объектов), которая не меняется при указанных операциях. Например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади. В качестве инварианта может использоваться, например, остаток от деления на 2 (четность) или другое натуральное число. Если инвариант различает два положения, то от одного положения нельзя перейти к другому.

Рассмотрим задачу, в которой инвариантом является четность некоторой величины.

Задача 60. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешено к любым двум из них прибавить по 1. Можно ли уравнять числа, сделав это несколько раз?

Решение. Нужно найти инвариант указанных в условии операций. За одну операцию сумма данных чисел увеличивается на 2, значит, инвариантом является нечетность суммы всех чисел. Исходная сумма равна 21, следовательно, после любого числа операций она будет нечетной. С другой стороны, если удастся уравнять числа (сделать их все равными некоторому числу a), то сумма полученных чисел должна делиться на 6 (так как она будет равна $6a$), а значит, быть четной, что невозможно. Следовательно, числа уравнять нельзя. ■

Рассмотрим более сложную задачу, в которой инвариант найти не просто.

Задача 61. На острове Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно меняют окраску на третий цвет. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

Решение. Будем искать инвариант, но сначала надо разобраться, какие операции происходят: два хамелеона двух разных цветов «пропадают» и «появляются» два хамелеона третьего цвета. Обозначим количество серых, бурых и малиновых хамелеонов соответственно буквами a, b и c. Тогда операция, описанная в условии, означает, что из набора (a,b,c) получается набор $(a-1,b-1,c+2)$ или набор $(a-1,b+2,c-1)$ или набор $(a+2,b-1,c-1)$. Рассмотрев разности между двумя числами набора $a-b$, $b-c$ и $a-c$, можно заметить, что они в результате операции либо не меняются, либо изменяются на 3. Значит, остатки от деления разностей на 3 инвариантны. Первоначально две разности равны –2, а третья –4, все они не делятся на 3. Если же все хамелеоны станут одного цвета, то одна из разностей станет равна 0, будет делиться на 3, что невозможно. ■

В некоторых задачах решение основано на использовании полуинварианта – величины, которая при каждой операции может изменяться только в одном направлении (возрастать или убывать).

Задача 62. Вокруг поляны стоят 12 домиков, покрашенные в белый и красный цвета, в которых поселилось 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале это же делает второй (по часовой стрелке) и т.д. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.

Решение. Рассмотрим число пар гномов-друзей, у которых дома разного цвета. Каждый месяц это число не увеличивается. Действительно, если цвет дома сохраняется, то число не меняется, если же цвет дома меняется, то это число уменьшается. Так как это число неотрицательно, оно не может бесконечно уменьшаться, значит, с того момента, когда оно перестанет меняться, каждый гном будет красить свой дом в один и тот же цвет. ■

Задачи.

63. а) На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешено переворачивать одновременно любые два стакана. Можно ли поставить все стаканы дном вниз? б) 9 пятаков лежат гербом вверх. Разрешено за раз перевернуть любые 8 из них. Можно ли добиться, чтобы все пятаки легли гербом вниз? в) То же для 8 пятаков, переворачиваются – 7.

64. 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 яблок так, чтобы количество яблок в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

65. У числа 2010! вычислили сумму цифр. У полученного числа опять вычислили сумму цифр, и так до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое это было число?

66. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с нее два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет еще один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Можно ли определить, какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

67. В языке дикарей хотийцев всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого количества следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» или добавления в любом

месте звуков «уы». Означают ли одно и то же слова: «уыу» и «ыуы»?

68. На прямой стоят две фишки: слева – красная, справа – синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева – синюю, а справа – красную?

69. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поросли бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что это поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

70. В одной клетке квадратной таблицы 4×4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

71. а) На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидит по веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседнее дерево, один – по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

б) А если чижей и деревьев n?

72. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Вместо любых двух чисел a и b из этого набора записываются числа $a+\frac{b}{2}$ и $b-\frac{a}{2}$. Затем эта операция производится с двумя произвольными числами из получившегося набора и т.д. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

73. На столе лежат 22 монеты. Петя закрывает глаза, а Витя переворачивает монеты по одной, говоря при каждом переворачивании «Хоп!» (он может переворачивать одну монету несколько раз, не забывая каждый раз сказать «Хоп!»). После этого Витя накрывает одну из монет рукой, а Петя открывает глаза и отгады-

вает, как лежит невидимая монета – гербом вверх или вниз. Как Петя это делает?

74. Каждая из расположенных по кругу 12 ламп может находиться в одном из двух состояний: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трех ламп, расположенных подряд. Вначале горит только одна лампа. Можно ли добиться того, чтобы горели все 12 ламп?

75. Круг разбит на 6 секторов. В секторах стоят 6 шашек, по одной в каждом. За один ход разрешается передвинуть две шашки на один сектор каждую (в одинаковых или противоположных направлениях). Можно ли за несколько ходов собрать все шашки в одном секторе?

76. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2010-го дня. (Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим – число $\frac{2}{1/a+1/b}$).

77. На шахматной доске разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые две соседние клетки. Можно ли с помощью таких операций перекрасить всю доску в черный цвет? Рассмотрите случаи размера доски а) 8×8; б) 9×9.

78. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

79. Население города состоит из n человек, и каждый живет в отдельном домике. Однажды жители города решили обменяться домами. После обмена выяснилось, что расстояние между новыми домами любых двух жителей не меньше, чем расстояние между их старыми домами. Докажите, что в результате обмена расстояние между домами любых двух жителей не изменилось.

80. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9; либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2010?

5. Раскраска

В математических задачах встречаются раскраски фигур. Раскраска может быть задана условием задачи, в некоторых задачах нужно раскрасить фигуру определенным образом, но чаще встречаются задачи, в которых раскрашивание фигуры определенным образом помогает решить задачу.

Задача 81. Можно ли разбить на доминошки (каждая – из двух клеток) шахматную доску без противоположных углов $a1$ и $h8$?

Решение. В этой задаче говорится о шахматной доске, которая уже раскрашена в два цвета. Каждая доминошка, как бы она ни располагалась на доске, состоит из соседних клеточек разного цвета: черной и белой. Поэтому если бы удалось разбить доску без угловых клеток (всего 62 клетки) на доминошки, то получилось бы поровну (по 31) белых и черных клеток. Клеточки $a1$ и $h8$ лежат на одной диагонали и имеют одинаковый цвет, поэтому в оставшейся части шахматной доски клеток одного цвета на две больше, чем другого. Поэтому доску нельзя разбить на доминошки. ■

Чаще всего в задачах на раскраску используется шахматная черно-белая раскраска. Однако может быть использовано и больше цветов. Рассмотрим задачу.

Задача 82. Можно ли разрезать шахматную доску без клетки $a1$ на плитки размером 1×3?

Решение. Для решения этой задачи выполним «диагональную раскраску» доски в три цвета (рис. 1). При такой раскраске, как бы плитка размером 1×3 не располагалась, она всегда займет по одной клетке каждого из трех цветов. Если бы доску можно было разрезать на такие плитки, то клеток всех цветов было бы поровну, но в нашей рас-

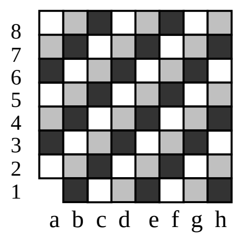


Рис. 1

краске клеток одного цвета 22, второго цвета – 21, третьего цвета – 20 клеточек. Следовательно, доску разрезать нельзя. ■

Задачи.

83. Можно ли из пяти фигур, изображенных на рис. 2, сложить прямоугольник размером 4×5?

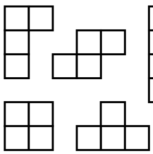


Рис. 2

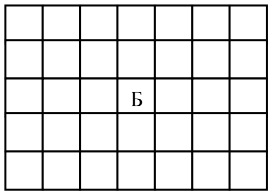


Рис. 3

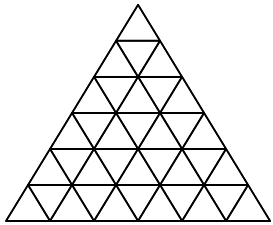


Рис. 4

84. Замок состоит из 34 комнат и бассейна (рис. 3), в каждой стене, разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

85. Треугольный замок состоит из 36 одинаковых залов (рис. 4), между любыми двумя залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет осмотреть человек, не желающий нигде побывать более одного раза?

86. Каждая сторона правильного треугольника разбита на k равных частей, через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на k^2 маленьких треугольничков. Назовем цепочкой последовательность треугольничков, в которой ни один треугольник не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее число треугольничков в цепочке?

87. Мышка грызет куб сыра, составленный из 27 единичных кубиков. Когда она съедает кубик, то переходит к соседнему через общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб кроме центрального кубика?

88. 25 жуков сидели по одному на каждой клетке доски 5×5. В некоторый момент каждый жук перелетел на одну из соседних клеток (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что хотя бы одна клетка освободилась.

89. Можно ли шахматную доску с вырезанным угловым полем покрыть уголками, изображенными на рис. 5 (уголки можно поворачивать)?

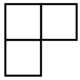


Рис. 5

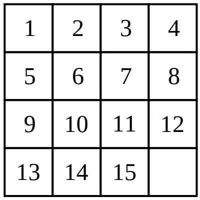


Рис. 6

90. Игра «15» представляет собой поле – коробочку размером 4×4, в которой находятся 15 фишек (квадратиков 1×1), пронумерованных числами от 1 до 15; при этом одно поле остается пустым (рис. 6). В начале игры пустое поле находилось в правом нижнем углу. Я начал двигать фишки по полю. За один ход я передвигал на пустое поле одну из фишек, находившуюся на соседнем поле. В результате порядок расположения фишек изменился, но пустое поле вновь оказалось в правом нижнем углу. Докажите, что я сделал четное число ходов.

91. Можно ли фигуру из 60 клеток (рис. 7) замостить двадцатью прямыми тримино (рис. 8а; размер клетки тримино совпадает с размером клетки фигуры)?

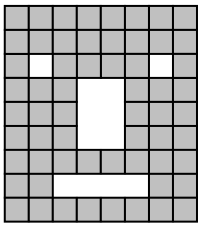
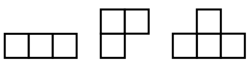


Рис. 7



а б в

Рис. 8

92. Можно ли обойти шахматную доску ходом коня, побывав на каждом поле по одному разу, начав в левом нижнем углу доски (на поле $a1$) и закончив в правом верхнем (на поле $h8$)?

93. В прямоугольную коробочку были сложены несколько прямых тримино (рис. 8а) так, что они заполняли ее целиком (коробочка такова, что лежащие в ней фигурки не могут налегать друг на друга). Затем одно прямое тримино заменили на тримино-уголок (рис. 8б). Докажите, что образовавшийся набор не поместится в коробочку.

94. Можно ли прямоугольник 11×12 разрезать на Т-тетрамино (рис. 8в)?

95. Можно ли доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1?

96. Фигура «слоненок» ходит по шахматной доске, как и слон, по диагонали, но только на одно поле. Можно ли перекрасить клетки шахматной доски, используя черный и белый цвета, чтобы при каждом ходе «слоненка» цвет поля менялся?

97. Клетки таблицы 15×15 окрашены в три цвета. Докажите, что найдутся хотя бы две строки, в которых одинаковое количество клеток какого-то цвета.

98. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что на ней найдутся три точки A, B и C, окрашенные в один цвет такие, что точка B является серединой отрезка AC.

6. Наибольшее, наименьшее

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения некоторой величины называют экстремальными. В экстремальных задачах полное решение, как правило, должно содержать:

1) ответ, т.е. наибольшее или наименьшее значение, искомое в задаче,

2) пример, показывающий, что это значение достижимо,

3) оценку, т.е. доказательство того, что это значение действительно является наибольшим или наименьшим. (***Важно!*** Доказательство того, что невозможно достижение большего / меньшего значения, не должно быть связано с построенным примером. Кроме того, оценка не заменяет примера.)

Задача 99. Какое наибольшее количество клеток таблицы 8×8 можно покрасить так, чтобы никакие три центра окрашенных клеток не лежали на одной прямой?

Решение. Можно раскрасить 16 клеток. Пример раскраски, удовлетворяющей условию задачи, приведен на рис. 9. Выполним оценку. Поскольку в каждой строке может находиться не более двух закрашенных клеток, а всего строк 8, то всего можно закрасить не более 16 клеток. ■

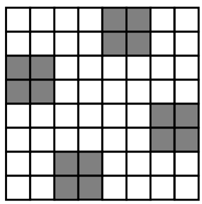


Рис. 9

Примечание. Доказать, что нельзя раскрасить большее число клеток, можно и иначе. Предположим противное: можно покрасить не менее 17 клеток. Тогда по принципу Дирихле в какой-то горизонтали, либо в какой-то вертикали окажется не менее трех окрашенных клеток, причем их центры будут лежать на одной прямой, что противоречит условию задачи.

Задача 100. Какое минимальное число прямоугольников размером 1×2 клетки нужно закрасить на доске 8×8 клеток, чтобы любой квадрат 2×2 содержал по крайней мере одну закрашенную клетку?

Решение. Нужно закрасить 9 прямоугольников, на рис. 10 показан пример. Для доказательства минимальности данного ответа рассмотрим вспомогательную раскраску доски (рис. 11). Любой из прямоугольников размера 1×2 пересекается не более чем с одним из девяти закрашенных квадратов размера 2×2. Следовательно, нам потребуется закрасить не менее девяти прямоугольников. ■

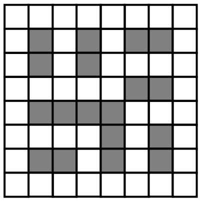


Рис. 10

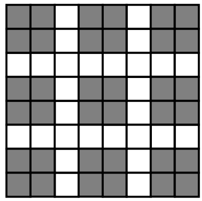


Рис. 11

Задачи.

101. Какое наибольшее количество а) ладей, б) слонов, в) коней, не бьющих друг друга, можно расставить на доске 8×8?

102. На столе лежат 7 карточек. За один ход разрешается перевернуть любые 5 карточек. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки?

103. На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?

104. Какое наибольшее количество уголков, состоящих из трех квадратов 1×1, можно поместить в прямоугольнике 5×7? (Уголки нельзя накладывать друг на друга).

105. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?

106. За какое наименьшее количество выстрелов можно с гарантией подбить четырёхклеточный корабль в игре «морской бой»?

107. Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить Монетный Двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было бы уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

108. В музее города Черноморска имеется коллекция из 96 одинаковых золотых монет, лежащих в ряд. Однажды был пойман воришка Паниковский, у которого обнаружили 19 монет из этой коллекции. На следствии он показал, что заменил 19 лежащих подряд монет на фальшивые, которые легче настоящих, но внешне от них неотличимы. За какое наименьшее количество взвешиваний можно отыскать все фальшивые монеты, используя чашечные весы без гирь?

109. Найдите все такие натуральные $n \geq 3$, что все целые числа от 1 до n можно расставить по окружности так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих чисел делилась на следующее за ними по ходу часовой стрелки число.

110. N цифр – единицы и двойки – расположены по кругу. *Изображенным* назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?

7. Принцип крайнего

При решении многих задач ключевой идеей оказывается рассмотрение некоторого объекта, обладающего какими-либо крайними или экстремальными свойствами: наибольшего или наименьшего числа, самой верхней или нижней точки, ближайшей точки, угловой точки, предельного случая и т.д. Этот метод решения задач называется принципом (правилом) крайнего.

Задача 111. По кругу записано 100 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все 100 чисел равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из записанных чисел (или одно из них, если таких чисел несколько). Из того, что оно не меньше своих соседей и равно их среднему арифметическому, следует, что оно равно своим соседям. Проводя аналогичные рассуждения далее, получаем, что все числа равны. ■

Примечание. Аналогично можно было рассуждать, рассматривая сначала не самое большое, а самое маленькое число.

Задача 112. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

Решение. Расположим грибников по убыванию количества собранных каждым из них грибов и рассмотрим трех первых грибников. Если третий собрал 16 грибов, то вместе три грибника собрали грибов не меньше, чем $16 + 17 + 18 = 51$, тогда требуемое доказано. Если третий нашел не больше 15 грибов, то оставшиеся четыре грибника собрали вместе не более $14 + 13 + 12 + 11 = 50$ грибов. Отсюда заключаем, что первые трое собрали вместе не менее 50 грибов. ■

Задачи.

113. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

114. В системе Зеленой Собаки 2011 планет. На каждой из этих планет сидит астроном и смотрит в телескоп на ближайшую планету. Докажите, что если попарные расстояния между планетами различны, то найдется планета, на которую никто не смотрит.

115. На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?

116. В течение рабочего дня каждый депутат посетил заседание парламента. Все депутаты приходили и уходили в разное время, но никто из них уходя больше не возвращался. Оказалось, что любые два депутата встретились на заседании. Докажите, что был момент, когда все депутаты присутствовали.

117. На каждой клетке шахматной доски поставлено число так, что каждое из чисел равно среднему арифметическому всех своих соседей. Докажите, что все расставленные числа равны между собой.

118. На плоскости даны n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что различных отмеченных точек не меньше, чем $2n-3$.

119. 2010 прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку) разбивают плоскость на части. Докажите, что к любой прямой примыкает треугольник разбиения.

120. Про 21 число известно, что сумма любых пяти из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел положительна.

121. а) Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. Найдите эти числа и докажите, что других нет.

б) Тот же вопрос про 100 чисел, дающих в сумме 5051.

122. По окружности расположены 6 чисел, при этом каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна единице. Найдите эти числа.

123. Покажите, как любой четырехугольник разрезать на три трапеции (параллелограмм тоже можно считать трапецией).

124. Петя купил "Конструктор", в котором было 100 палочек разной длины. В инструкции к "Конструктору" написано, что из любых трёх палочек "Конструктора" можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение, составляя из палочек треугольники. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какое наименьшее число проверок (в самом плохом случае) надо сделать Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение инструкции?

8. Игровые задачи

Под математической игрой обычно понимают игру двух соперников, обладающую следующими свойствами. Игроки выполняют некоторые действия (ходы) по очереди по определенным правилам. В каждый момент игры состояние характеризуется позицией, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Объявляется также, по каким правилам определяется выигравший или проигравший игрок (некоторые игры допускают ничью). Добиться выигрыша и есть цель каждого игрока.

Примерами математических игр могут служить шахматы, шашки, крестики-нолики. В них результат игры определяется только действиями соперников. Игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими не являются, т.к. в них результат игры зависит не только от действий игроков, но и от случая (расклада и т.п.).

Если один из игроков может выполнять ходы так, что обеспечит себе выигрыш независимо от действий соперника, то говорят, что у него есть ***выигрышная стратегия***. В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). Например, игра крестики-нолики на доске 3×3 является игрой с ничейной стратегией для обоих игроков. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя выигрышные или ничейные стратегии в этих играх существуют, они пока не найдены.

В олимпиадных игровых задачах, как правило, требуется определить, кто из игроков (начинающий игру или его противник) имеет выигрышную стратегию, указать эту стратегию (т.е. инструкцию или алгоритм действий) и обосновать, что она действительно гарантирует игроку выигрыш независимо от действий соперника. Для поиска выигрышной стратегии могут использоваться разные идеи: поиск стратегии с конца, симметрия, передача хода и другие.

8.1. Поиск стратегии с конца

В этом разделе рассматриваются задачи, в которых выигрышная стратегия ищется «с конца» игры. Для этого нужно определить, какой ход является выигрышным, а какой проигрышным. Ход называется выигрышным, если игрок, делающий его, гарантированно обеспечивает себе выигрыш. Если же после хода игрока у соперника есть возможность выиграть (сделать выигрышные ходы), то такой ход называется проигрышным.

Задача 125. Играют двое. Первый называет любое число от 1 до 10. Затем они поочередно прибавляют к последнему названному числу число от 1 до 10 и называют сумму. Выигрывает тот, кто назовет 20. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш?

Решение. Рассуждаем с конца. Последним ходом будет названо число 20. Если игрок называет какое-либо число от 10 до 19, то его соперник может выиграть, назвав сразу число 20, следовательно, это проигрышные ходы. Если игрок назовет число 9, то любой ход соперника является проигрышным (он может называть только числа от 10 до 19), следовательно, «ход на 9» является выигрышным. Значит, выигрывает игрок, который может назвать число 9. Эта возможность есть у первого игрока при первом же ходе. ■

Таким образом, принцип решения игровых задач методом рассуждения «с конца» состоит в следующем: нужно определить выигрышные и проигрышные ходы. Ход является выигрышным, если после него любой ход соперника является проигрышным. Ход является проигрышным, если после него у соперника есть хотя бы один выигрышный ход.

Задача 126. Условие задачи то же, что в задаче 125, но выигрывает игрок, назвавший число 100. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение. Проигрышными являются ходы от 90 до 99 (после них соперник сразу назовет 100), 89 – выигрышный ход (после него можно сделать только проигрышные ходы от 90 до 99), проигрышные – от 79 до 89, а выигрышный – 78 и т.д. Перечислим остальные выигрышные ходы: 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Следовательно, выигрывает первый игрок, который первым ходом называет число 1, а в каждый следующий его ход он должен прибавить число, которое в сумме с числом, прибавленным соперником, составляет 11. ■

Задача 127. «Поставь на ноль». Имеется клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы, начиная с нуля (рис. 12). Фишка стоит на поле 25. Двое игроков поочередно передвигают фишку на 1, 2, 3 или 4 клетки влево. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Игра называется ***правильной***, если игрок, имеющий выигрышную стратегию, действует по этой стратегии).

0	1	2	3		24	25

Рис. 12

Решение. Рассуждаем с нуля (здесь заканчивается игра). Очевидно, что ход на 0 является выигрышным, на 1, 2, 3 и 4 – проигрышные (с них за один ход можно попасть на 0), на 5 – выигрышный (с 5 любой ход ведет к проигрышу) и т.д. Выигрышными будут все клетки с номерами, кратными 5 (рис. 13).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	23	24	25
в	п	п	п	п	в	п	п	п	п	в	…	п	п	

Рис. 13

Таким образом, первый ход первого игрока будет проигрышным (он не может поставить фишку на число, кратное пяти). Выигрывает второй, он должен ставить фишку на числа, кратные пяти. ■

Примечание. Можно заметить, что в результате получилась серия (в, п, п, п, п), которая повторяется. В аналогичных задачах (см. задачу 129) нужно найти такую повторяющуюся серию. При этом нужно иметь ввиду, что такая серия может идти не с самого начала (точнее, не с самого конца) игры.

Задачи.

128. Играют двое. Первый называет любое число от 1 до 10. Затем они поочередно прибавляют к последнему названному числу число от 1 до 10 и называют сумму. Проигрывает тот, кто назовет трехзначное число. Кто выигрывает при правильной игре?

129. Условие то же, что в задаче 127, но передвигать фишку можно а) на 1, 2 или 4 клетки; б) на 1, 3 или 4 клетки; в) на 1, 2 или 6 клеток; г) на 2 или 5 клеток; д) на 2, 4 или 7 клеток?

130. Имеется кучка из 25 камней. Игроки по очереди берут из этой кучки 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода.

Примечание. Очевидно, что эта игра изоморфна[1] игре «Поставь на ноль», в которой фишку можно передвигать на 1, 2 или 3 клетки. Поэтому решив одну задачу, можно указать решение и другой.

131. В куче 25 камней. Игроки по очереди могут взять из кучи 2 камня, 4 камня или 7 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто победит при правильной игре?

132. В куче лежат 50 камней. Двое поочередно добавляют в нее любое количество камней от 1 до 10. Выигрывает тот, кто первым сумеет довести количество камней до двухсот. Кто выигрывает?

133. «Одинокий ферзь». На шахматной доске на поле *f8* стоит ферзь. Игроки по очереди передвигают его на любое количество клеток влево, вниз или по диагонали влево вниз. Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле *a1*. Кто выиграет при правильной игре? Сформулируйте игру о камнях, изоморфную игре «Одинокий ферзь».

134. Волк и Заяц играют в следующую игру. На доске написано некоторое натуральное число. Ход состоит в том, чтобы вычесть

---

[1] Игры называют **изоморфными**, если они «одинаково устроены», т.е. между их условиями существует взаимно однозначное соответствие.

из числа какую-нибудь его ненулевую цифру и написать на месте старого числа получившееся число. Выигрывает тот, кто получит ноль. Начинает игру Волк. Какое число первоначально должно быть написано, чтобы Заяц имел выигрышную стратегию?

8.2. Симметрия

В некоторых игровых задачах наличие удачного хода может обеспечиваться симметрией.

Задача 135. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрывает первый: сначала он должен положить пятак так, чтобы центры пятака и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока начинающий должен отвечать симметрично относительно центра стола. После каждого хода первого игрока расположение монет на столе будет симметричным относительно центра. В этом случае симметричные точки одновременно либо заняты монетами, либо не заняты. Поэтому если есть возможность сделать ход второму игроку, то есть возможность сделать симметричный ход и первому игроку. Поскольку игра не может продолжаться бесконечно, проиграет второй. ■

В игровых задачах на использование симметрии нужно стремиться создавать симметричную ситуацию, чтобы иметь возможность делать ответные ходы, симметричные ходам противника. Выбирая стратегию, основанную на симметрии, важно помнить, что очередному симметричному ходу может помешать только что сделанный ход противника. Рассмотрим пример.

Задача 136. Игроки по очереди закрашивают клетки квадрата 10×10, причем за один ход можно закрасить одну из трех фигур, изображенных на рис. 14, дважды закрашивать клетку нельзя. Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку. Кто имеет выигрышную стратегию?

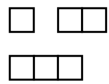


Рис. 14

Решение. Выигрывает второй. Выигрышная стратегия: после каждого хода первого игрока второй должен закрашивать клетки, расположенные симметрично относительно центра квадрата клеткам, закрашенным только что первым игроком. После каждого хода второго игрока картина на доске будет симметричной относительно центра. В этом случае симметричные клетки одновременно либо закрашены, либо не закрашены. Поэтому если есть возможность сделать ход первому игроку, то есть возможность сделать симметричный ход и второму игроку. ■

Примечание. Если воспользоваться осевой симметрией, то после некоторых ходов первого игрока будет невозможно закрасить симметричные клетки (некоторые из них могут быть только закрашены первым игроком).

Симметрия в игровых задачах не обязательно имеет геометрический смысл.

Задача 137. Имеются две кучки камней – по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает второй при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом нужно брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но только из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ответный ход. ■

Задачи.

138. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают по одной клетке так, чтобы закрашенные клетки не имели общих точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

139. На окружности даны $2n$ точек. Двое по очереди проводят хорды с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались (хорды могут иметь общие концы). Проигрывает тот, кто не сможет провести хорду. Кто победит при правильной игре?

140. Имеются три одинаковые кучки камней. Двое играющих берут по очереди любое количество камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает взявший последние камни. Кто выиграет при правильной игре?

141. Имеются две кучки камней: в одной – 30, в другой – 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из од-

ной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто может обеспечить себе победу?

142. Есть клетчатый прямоугольник 3×10 клеток. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно закрасить квадрат 1×1, 2×2 или 3×3 клетки. Красить уже покрашенные клетки нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

143. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре?

144. а) Соты имеют форму квадрата 9×9 (рис. 15). Все квадратики, кроме центрального (С), заполнены медом. В центре – деготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дегтя. Проигрывает тот, кому остался только деготь. Кто выиграет при правильной игре?

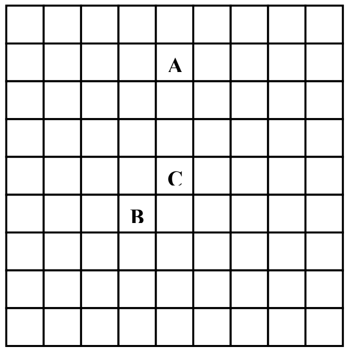


Рис. 15

б) Задача та же, но деготь находится не в центре, а в клетке А.

в) Деготь находится в клетке В.

145. Двое по очереди ставят слонов (цвет значения не имеет) на клетки шахматной доски. Нельзя ставить фигуру под бой ранее поставленной (не важно, самим игроком или его противником) фигуры. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

146. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки. За один раз можно оборвать один или два соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

147. Двое заполняют по очереди таблицу 3×3 произвольными действительными числами. Затем первый находит сумму чисел первой и третьей строк, а второй – сумму чисел первого и третьего столбцов. Выигрывает тот, у кого сумма больше. Кто может обес-

печить себе победу?

148. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

149. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Кто выигрывает при правильной игре?

150. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто отломит дольку 1×1. Кто выигрывает при правильной игре?

151. Двое играют на доске 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник – нолики (по одному за ход). В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, – это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, в которых ноликов больше – очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8.3. Разные игры

Не все игровые задачи решаются с использованием описанных выше методов. В этом разделе представлены примеры разных игровых задач, решение которых основано на иных подходах.

В некоторых задачах выигрышная стратегия не указывается, доказывается только ее существование. Рассмотрим пример.

Задача 152. Двое по очереди выписывают на доску делители числа 2010. При этом запрещается выписывать делители уже выписанных чисел. Проигрывает тот, кто не может выписать очередное число. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Игра конечна. Предположим, что у второго есть выигрышная стратегия. Это означает, что какие бы числа не выписывал первый игрок, второй всегда может гарантировать себе последний ход. Например, если первый выпишет на доску цифру 1, то у второго найдется выигрышная стратегия S и следующим ходом он выпишет на доску число a. Однако если первый первым ходом выпишет число a, то число 1 на доске уже не появится и, значит, первый может воспользоваться выигрышной стратегией S. Таким образом, выиграет первый. ■

В этой задаче используется прием «передачи хода». Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

Задачи.

153. Выписаны в ряд числа от 1 до 2010. Играют двое, делая ходы поочередно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто зачеркнет последнее число. Докажите, что первый игрок выиграет при правильной игре.

154. Двое играют на клетчатой доске 2×10, расположенной вертикально. Играющий закрашивает любую клетку и вместе с ней все клетки выше и правее от закрашенной. Кто закрасит последнюю клетку, тот проиграл. Кто имеет выигрышную стратегию?

155. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n\times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

156. Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Первый выбирает два ребра куба и красит их в зеленый цвет, второй – в красный. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красить дважды одной краской. Выигрывает тот, кто первым сможет покрасить своей краской все ребра какой-либо грани. Кто имеет выигрышную стратегию?

157. На доске написаны числа 1, 2, …, 1000. Двое по очереди

стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остается два числа. Если их сумма делится на 3, то побеждает первый игрок, если нет – второй. Кто выигрывает при правильной игре?

158. На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки Вани и две белые фишки Серёжи (рис. 16). Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали

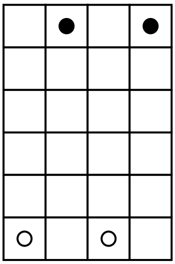
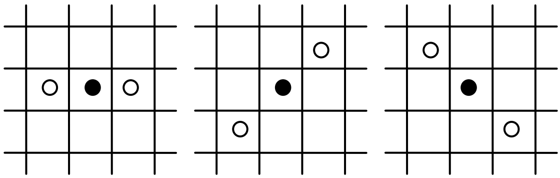


Рис. 16



а б в

Рис. 17

(как на рис. 17), она считается «убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?

159. Игроки по очереди ставят числа вместо звездочек в следующей системе неравенств: $\begin{cases} * = * \\ * = * + * \\ * = * + * + * \end{cases}$. Выигрывает первый, если все равенства выполняются, второй – если хотя бы одно равенство неверно. Кто выигрывает при правильной игре?

160. На доске написано уравнение $*x^2 + *x + * = 0$. Первый игрок называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый выбрать три числа так, чтобы квадратное уравнение имело разные рациональные корни, или второй всегда может ему помешать?

9. Виды математических состязаний школьников

Для школьников проводятся различные математические состязания, которые рассчитаны на разный уровень подготовки учащихся, преследуют различные цели, среди них:

1) математические олимпиады,
2) международный конкурс «Кенгуру»,
3) математический бой,
4) турнир Архимеда,
5) интеллектуальный марафон,
6) математическая регата,
7) математическое ориентирование

и другие. Остановимся подробнее на некоторых математических состязаниях для школьников.

9.1. Всероссийская олимпиада школьников по математике

Что такое олимпиада[1]. Это соревнование между школьниками, в котором участник за фиксированное время должен решить предложенные задачи. Обычно решение оформляется в письменном виде (некоторые этапы олимпиады в Санкт-Петербурге, согласно традиции, проводятся в форме устных олимпиад). Жюри за каждую задачу ставит определенное количество баллов, в зависимости от степени продвижения участника в ее решении. Итоговый результат выступления определяется по сумме баллов, набранных участником. В настоящее время на всех этапах Всероссийской математической олимпиады школьников правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Можно сказать, что математическая олимпиада – это творческое соревнование, являющееся гармоничным сочетанием спорта (точнее, интеллектуального состязания) и науки. Для успеха на олимпиаде необходимо иметь некоторые спортивные качества: психологическую устойчивость, умение выкладываться в ограни-

---

[1] Использованы материалы из книги: Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Всероссийская олимпиада школьников по математике: Методическое пособие. – М., 2005.

ченный промежуток времени, бойцовские качества (умение собраться в нужный момент, переносить поражения). В математических олимпиадах многие задания начинаются со слов «Докажите, что…». Уже формулировка заданий показывает, что школьнику предлагается самостоятельно вывести некое математическое утверждение. В процессе решения олимпиадных задач вырабатываются навыки творческой деятельности, которые впоследствии облегчают переход к самостоятельным научным исследованиям.

Из истории олимпиад. Первая математическая олимпиада в России была организована в Ленинграде в 1934 году по инициативе замечательного математика Б.Н. Делоне. Уже на следующий год городская олимпиада прошла в Москве. До войны олимпиады проводились ежегодно и быстро завоевали популярность. Сразу после войны они были возобновлены.

Первой математической олимпиадой, в которой приняли участие несколько областей РСФСР, стала проводившаяся в Москве олимпиада 1960 года. Ее иногда называют «нулевой» Всероссийской математической олимпиадой школьников. Официальная нумерация началась с 1961 года.

В 1974 году был создан Центральный оргкомитет Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников. Центральным оргкомитетом и методическими комиссиями по физике, математике и химии были разработаны структура, задачи и цели олимпиады, которые в основном остаются неизменными и по настоящее время.

Структура олимпиады. Согласно Положению о всероссийской олимпиаде школьников олимпиада по математике проводится в четыре этапа: школьный, муниципальный, региональный и заключительный.

Основными целями и задачами Олимпиады являются выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности, создание необходимых условий для поддержки одаренных детей, пропаганда научных знаний.

Первый этап (школьный) проводится общеобразовательными учреждениями в октябре. Олимпиада проводится для учащихся 5-11 классов. В нем может участвовать каждый учащийся. Вся организационная и методическая работа обеспечивается педагогическими коллективами школ.

Второй (муниципальный) этап проводится местными органами управления образованием в ноябре-декабре по заданиям, разработанным муниципальными предметно-методическими комиссиями с учетом методических рекомендаций Центральной предметной методической комиссии по математике. Олимпиада проводится для учащихся 7-11 классов. Участниками второго этапа олимпиады являются победители и призеры первого этапа, а также победители и призеры второго этапа олимпиады предыдущего года.

Третий (региональный) этап проводится в субъектах Российской Федерации государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации в январе-феврале одновременно во всех субъектах Российской Федерации, в сроки, определенные Министерством образования и науки РФ. Олимпиада проводится для учащихся 9-11 классов в два дня. Продолжительность каждого тура – 4 часа. Каждый день школьникам предлагается решить по 4 задачи. Третий этап Всероссийской олимпиады школьников уже является отборочным, носящим «спортивный» характер. Победители регионального этапа становятся участниками заключительных этапов олимпиады.

Четвертый (заключительный) этап проводится образовательными учебными заведениями высшего профессионального образования Российской Федерации и соответствующим государственным органом управления образованием субъекта РФ в апреле. Олимпиада проводится для учащихся 9-11 классов в два тура. Время проведения каждого тура – 5 часов. Каждый день участникам предлагается решить по 4 задачи.

Задания третьего и заключительных этапов олимпиады составляются Центральной предметной методической комиссией по математике. Методическая комиссия включает в себя «задачных композиторов»: преподавателей, аспирантов и студентов ведущих вузов России, становившихся победителями и призерами Всероссийских и Международных математических олимпиад. Все задания, подготовленные Методической комиссией, являются новыми (авторскими).

Структура варианта (заданий)

Главными при формировании комплектов заданий олимпиад являются следующие принципы.

1. Нарастание сложности заданий от первого к последнему. При этом их трудность должна быть такой, чтобы с первым заданием могли успешно справиться примерно 70% участников, со вторым — около 50%, с третьим — около 20%, а с последними – лишь наиболее сильные участники олимпиады. (На школьном этапе задания должны быть более простыми: с первым заданием должны справиться почти все участники олимпиады).

2. Тематическое разнообразие заданий. В комплект должны входить задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике, а в старших классах желательно включение задач по теории чисел, тригонометрии, стереометрии, математическому анализу. При этом допустимо и даже рекомендуется включение задач, объединяющих различные разделы школьной математики.

3. Обязательная новизна задач для участников олимпиады. В случае, когда задания выбираются из печатных изданий или из материалов специализированных ресурсов сети Интернет (это возможно на начальных этапах олимпиады), Методическая комиссия этого этапа должна выбирать источники, неизвестные участникам. При составлении заданий нельзя использовать только один источник.

4. Эстетическая красота заданий. В математике существует понятие «красивая задача». К таковым относят задачи, в которых сочетаются интересный с научной точки зрения факт, простота формулировки и «элегантность» решения.

5. Недопустимость включения в задания олимпиады задач по разделам математики, не изученным по всем базовым программам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

Критерии оценки работ

Проверка работ на олимпиаде отличается от проверки контрольных. В школе внимание учителя сосредоточено на недостатках, поскольку это помогает отработать навыки и довести их до автоматизма. На олимпиаде цель другая – выявить позитивные идеи, найти думающих школьников, и потому отношение к опискам и даже ошибкам довольно снисходительное (тем более что многие школьники не умеют чётко выражать свои мысли).

В соответствии с целями проведения олимпиады строится и система оценок. Традиционными стали следующие оценки:

+ задача решена правильно;

+. задача решена, но имеются мелкие замечания к решению;

± задача в целом решена (в решении имеются легко устранимые пробелы);

+/2 имеется значительное продвижение в решении, но полное решение требует привлечения других существенных идей (задача решена «наполовину»);

∓ задача не решена, но подход к решению правилен;

−. задача не решена, но имеются некоторые разумные соображения;

− задача решена неправильно;

0 задача не решалась или решение не записывалось;

! добавляется к оценке, если решение содержит яркие идеи.

Выставленные символы после обсуждения членами жюри переводятся в баллы.

9.2. Международный математический конкурс «Кенгуру»

Конкурс «Кенгуру» возник в Австралии и быстро распространился по странам и континентам. В 1996 году организаторы конкурса из разных стран объединились в ассоциацию «Кенгуру без границ».

В России[1] конкурс впервые был проведен в 1994 году по инициативе Санкт-Петербургского Математического общества. Начиная с 1995 года, проведением конкурса руководит Российский оргкомитет, созданный в Санкт-Петербурге при Институте продуктивного обучения Российской академии образования. Опыт массового проведения математической игры показал, что ребята с большим энтузиазмом и удовольствием решают доступные для них, интересные и занимательные задачи, которые заполняют вакуум между стандартными и часто скучными примерами и задачами из школьного учебника и довольно трудными и требующими специальных знаний и подготовки задачами городских и районных математических олимпиад.

---

[1] Использованы материалы сайта: http://www.kenguru.sp.ru.

Главная цель конкурса – привлечь как можно больше ребят к решению математических задач, показать каждому школьнику, что обдумывание задачи может быть делом живым, увлекательным, и даже веселым. Цель эта достигается вполне успешно: например, в 2009 году в конкурсе участвовало более 5,5 миллионов ребят из 46 стран. А количество участников конкурса в России превысило 1,8 миллиона.

Подготовка заданий. Происходит это так: сначала оргкомитеты всех стран присылают в страну, организующую встречу, списки задач, которые они предлагают включить в варианты будущего конкурса. Во время встречи каждый ее участник получает полный комплект предложений всех стран, после чего участники разбиваются на пять рабочих групп (по числу возрастных категорий конкурса), и каждая такая группа вырабатывает один вариант конкурса. Согласованный таким образом международный вариант заданий служит общей основой для национальных вариантов, подготавливаемых затем в каждой стране. При переводе национальные оргкомитеты имеют право заменить небольшую часть заданий, с учетом специфики своих учебных программам по математике и национальных традиций математических соревнований. Но в любом случае значительная часть заданий должна быть доступна школьникам, не имеющим никакой специальной подготовки, а формулировки многих заданий должны быть веселыми и занимательными.

Поскольку в результате такой адаптации задания конкурса в разных странах могут отличаться друг от друга, на международном уровне ни командные, ни, тем более, личные достижения участников конкурса «Кенгуру» не сравниваются. Сравнивается только количество участников, и здесь наша страна уже несколько лет лидирует с заметным отрывом.

Участники конкурса. К участию в конкурсе, без предварительного отбора, допускаются все учащиеся 3-10 классов общеобразовательных учебных заведений, оплатившие организационный взнос. (Как и в других странах, участие в конкурсе платное, но плата очень небольшая, в последние годы – около 30-40 рублей. Эти деньги позволяют покрывать расходы по проведению соревнования и награждать многих участников конкурса небольшими, но разнообразными призами.) Возрастные категории распределены так: Ecolier – 3 и 4 классы, Benjamin – 5 и 6 классы, Cadet – 7 и 8 классы и Junior – 9 и 10 классы (в категории Student в нашей стране конкурс не проводится). В конкурсе могут принимать участие второклассники, в этом случае они решают задачи, предназначенные для учащихся 3 – 4 классов.

Проведение конкурса. Школьный организатор собирает индивидуальные заявки и организационные взносы от учеников своей школы и передает их в установленные сроки в Региональный оргкомитет. Региональный оргкомитет обобщает школьные заявки и передает их в Российский оргкомитет.

Конкурс проводится во всех школах в один и тот же день, в третий четверг марта. Перед началом конкурса каждый участник получает листок с задачами (этот листок остается у него, а значит, потом можно еще раз проверить себя и решить то, что не успел сразу) и бланк ответов. Затем все участники вносят свои личные данные в бланки ответов. С этого момента идет отсчет времени конкурса: 1 час 15 минут. Решив задачу, участник конкурса закрашивает в колонке с номером этой задачи букву, обозначающую выбранный ответ. Исправления в этой части бланка категорически запрещены. Сразу же по истечении времени конкурса, школьный организатор собирает работы и в тот же день передает их в Региональный оргкомитет.

Задания конкурса[1]. Вариант для каждой возрастной категории содержит 30 задач, на решение которых отводится 75 минут (у самых младших количество задач сокращено до 26).

При подборе задач главенствуют два принципа: во-первых, решение задач должно доставлять удовольствие, а во-вторых, "Кенгуру" – это хоть и не очень жесткое, но все-таки соревнование, поэтому побеждать должны наиболее способные и подготовленные.

Все задачи варианта разбиты на три категории, по десять задач в каждой (у младших в последний, наиболее трудный, раздел включается только 6 задач).

- Первый раздел составлен их легких, часто шуточных задач, каждая из которых оценивается в 3 балла. Эти задачи подбираются так, чтобы любой участник конкурса мог решить хотя бы несколь-

[1] С заданиями конкурса разных лет можно ознакомиться на сайте http://www.kenguru.sp.ru.

ко из них и получить при этом удовольствие. Они по силам каждому, кто внимательно прочитает условие, и не требуют никакой специальной подготовки. Но и в них встречаются неожиданные постановки вопросов и даже коварные "ловушки", так что нельзя сказать, что с участниками конкурса играют в поддавки.

- Задачи, оценивающиеся в 4 балла, рассчитаны на то, чтобы школьные отличники и "хорошисты" могли проявить себя. Эти задачи заметно сложнее трехбалльных и, как правило, ближе к школьной программе.
- Последний раздел состоит из трудных, нестандартных задач, оцениваемых в 5 баллов каждая. Они составляются так, чтобы даже наиболее подготовленным ребятам было о чем подумать. Для их решения надо проявить и смекалку, и умение самостоятельно рассуждать, и наблюдательность.

Таким образом, максимальная сумма баллов, которую может набрать участник конкурса, равна 120 (для учеников начальной школы эта сумма равна 100 баллам).

Подведение итогов. Работы всех участников конкурса поступают в Российский оргкомитет или в один из Межрегиональных оргкомитетов, где осуществляется компьютерная проверка. По результатам проверки для каждой параллели составляются списки участников в порядке убывания баллов. На основе этих списков составляются отчеты, которые затем, через Региональные оргкомитеты, поступают в каждую школу, принявшую участие в конкурсе. Из этого отчета каждый школьник может узнать, какое место он занял в своей школе, в своем городе или районе, а также в целом по стране. Результаты подводятся по каждой параллели отдельно, и хотя каждый вариант рассчитан на две параллели, например на 5 и 6 классы, но сравнивают пятиклассников с пятиклассниками, а шестиклассников – с шестиклассниками.

Проверка работ завершается в последней декаде апреля, тогда же выполняется рассылка ведомостей по Региональным оргкомитетам.

Награждение победителей. "Кенгуру" – конкурс массовый, и награждение по его результатам носит массовый характер. В соответствии с этим основная форма награждения – дипломы и небольшие призы с символикой конкурса, но эти призы должны поступать практически в каждую школу.

9.3. Математические регаты

Математические регаты[1] – сравнительно новая форма математических соревнований школьников. Это командное математическое состязание, в котором решение школьниками задач, разбор различных способов их решения, апелляции, подведение итогов и награждение призеров – все это проходит в один день, в течение 2,5 – 3, 5 ч.

Первая Московская межшкольная математическая регата для учащихся десятых классов, в которой участвовало восемь команд, была проведена весной 1996 года. Уже более десяти лет в Москве ежегодно проводятся, по меньшей мере, пять регат (по одной для каждой параллели с 7 по 11 класс). В настоящий момент в каждой Московской регате участвует несколько десятков команд. Информация о сроках проведения, материалы прошедших олимпиад, их результаты публикуются на сайте http://www.olimpiada.ru.

Правила математической регаты.

1. В математической регате участвуют команды учащихся одной параллели. В составе каждой команды 4 человека.
2. Соревнование проводится в 4-5 туров. Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение трех-четырех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном листе. Каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач. Листы каждая команда заготавливает заранее, на каждом из них сверху крупно написано название команды, а ниже – двойной индекс задачи и ее решение. Условия задач на этот лист не переписываются.
3. Использование литературы, калькуляторов, мобильных телефонов запрещено.
4. Проведением регаты руководит координатор. Он организует раздачу заданий и сбор листов с решениями, проводит разбор задач и объявляет итоги проверки.
5. Время, отведенное командам для решения, и «ценность» задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач, которые каждая команда получает непосредственно перед началом

[1] Использованы материалы из книги: Московские математические регаты / Сост. А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. – М., 2007.

каждого тура.

6. Проверка решений осуществляется жюри после окончания каждого тура. Жюри состоит из трех комиссий, специализирующихся на проверке задач № 1, 2 и 3 каждого тура соответственно.

7. Параллельно с проверкой координатор осуществляет разбор задач для учащихся, а затем объявляет итоги проверки. После объявления итогов тура команды, несогласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции. По результатам повторной проверки оценка может быть изменена. В спорных случаях окончательное решение об итогах проверки принимает председатель жюри.

8. Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах. Награждение победителей и призеров происходит сразу после подведения итогов регаты.

При составлении комплекта заданий для каждой регаты учитывается, что:

– для таких соревнований пригодны только такие задачи, решение которых может быть изложено кратко;

– задачи одного тура должны иметь различную тематику, но примерно одинаковый уровень сложности;

– задания разных туров, имеющие одинаковый порядковый номер, как правило, относятся к одной теме;

– сложность заданий и время, выделяемое на их выполнение, возрастают от тура к туру;

– распределение баллов по турам должно быть таким, чтобы «стоимость» задач последнего тура относилась к «стоимости» задач первого как $3:2$;

– задания первого тура должны быть сравнительно простыми, чтобы они были решены большинством команд.

Ниже приведены задачи Московской математической регаты для учащихся 8 класса (2003-04 уч.г.).

Первый тур (10 минут, 6 баллов за каждую задачу)

1.1. Докажите, что $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}>1$.

1.2. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены высоты

AK и AM. Может ли оказаться так, что точка K лежит на стороне параллелограмма, а точка M – на продолжении стороны?

1.3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы?

Второй тур (15 минут, 7 баллов за каждую задачу)

2.1. Числа a, b, c и d таковы, что $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$. Верно ли, что $a^3+b^3=c^3+d^3$?

2.2. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. На большем основании AD выбрана точка M так, что $BM=MD=3$ см. Найдите длину средней линии трапеции.

2.3. В круговом турнире каждый участник встретился с каждым один раз (победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0). Единоличным победителем турнира стал Иванов. Затем за употребление допинга был дисквалифицирован Петров, результаты всех игр с его участием были аннулированы, и единоличным победителем оказался Сидоров. Петров утверждает, что если бы дисквалифицировали не его, а Сидорова, то он (Петров) стал бы единоличным победителем. Может ли это быть правдой?

Третий тур (20 минут, 8 баллов за каждую задачу)

3.1. Решите уравнение $2x^2+5y^2-4xy-2y-4x+5=0$.

3.2. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны BC, точка N – середина стороны CD, P – точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что $\angle MAN=\angle BPM$.

3.3. У Золотой рыбки записаны и перенумерованы подряд все знакомые. Половина из них – щуки, треть – окуни, а все знакомые с номерами, делящимися на 4, – караси. Сколько всего знакомых у Золотой рыбки?

Четвертый тур (25 минут, 9 баллов за каждую задачу)

4.1. Верно ли, что все корни уравнения

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c,$$

где a, b и c – данные натуральные числа, являются целыми числами?

4.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$, $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

4.3. Дан круг радиуса 10 см. На одном из его радиусов отмечены пять точек: на расстояниях 1, 3, 5, 7 и 9 см от центра соответственно. Разрежьте этот круг на 5 равных частей так, чтобы в каждой части оказалась ровно одна точка.

9.4. Турнир Архимеда

Это лично-командная олимпиада для учащихся 5-6 классов. Для учащихся 5-х классов соревнование является лично-командным, а для учащихся 6-х классов – только командным[1].

Для пятиклассников сначала проводится личный этап (письменная олимпиада), продолжительность которого 60 минут. На этом этапе школьникам предлагается шесть задач, традиционная тематика которых – числовые ребусы, задачи на раскрашивание или разрезание, задачи на движение или работу, задачи, содержащие идеи четности или делимости, логические задачи, требующие составления алгоритмов или организации определенного процесса. Каждая задача оценена в баллах в зависимости от ее предполагаемой трудности. Затем, после пятнадцатиминутного перерыва, пятиклассники приступают к командному этапу, который продолжается 60-80 минут. Продолжительность олимпиады для шестиклассников составляет около 2,5 часов. Варианты командных заданий для 5-х и 6-х классов различаются по трудности, но содержат сходные типы заданий.

Все задания командных этапов также заранее оценены в баллах, причем учащимся дается право на ошибку, то есть они могут представить верное решение не с первой, а со второй (в некоторых случаях и с третьей) попытки, потеряв при этом часть баллов. После знака $\Rightarrow$ указывается количество баллов со второй попытки.

Подведение итогов турнира и награждение призеров происхо-

[1] Использованы материалы из книги: Математика: Интеллектуальные марафоны, турниры, бои: 5-11 классы: Кн. для учителя. – М., 2003.

дит примерно через 15-20 минут после окончания командных соревнований. Проверка результатов командных этапов происходит параллельно с работой команд, то есть команды имеют возможность сдавать решенные задачи в течение всего времени проведения этого этапа.

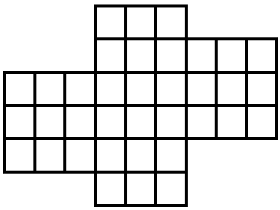
Приведем задачи одного турнира Архимеда для пятиклассников.

Личный этап

1. В волшебной стране живут только тролли и гоблины. Чудо-юдо, которое забрело в эту страну, сожрало $\frac{1}{4}$ всех троллей и $\frac{1}{4}$ всех гоблинов. Верно ли, что съедена половина населения страны? Ответ объясните. ***(4 балла)***

2. Сколько существует двузначных чисел, в десятичной записи которых цифра десятков меньше цифры единиц? ***(5 баллов)***

3. Покажите, как разрезать фигуру на восемь равных частей пятью прямолинейными разрезами. ***(5 баллов)***



4. Оксана сказала, что чашку разбила Соня. Лена и Соня сказали, кто разбил чашку, но каждая говорила очень тихо и их не услышали. Известно, что одна из трех девочек разбила чашку, и только она и сказала правду. Как ее зовут? Ответ объясните. ***(5 баллов)***

5. Вася и Петя, поссорившись, разбежались с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Через 5 минут Вася спохватился, повернул назад и, увеличив скорость, побежал догонять Петю. Во сколько раз увеличил скорость Вася, если он догнал Петю через 5 минут после того, как повернул назад? ***(6 баллов)***

6. Восемь кустов малины растут в ряд, причем количество ягод на любых двух соседних кустах отличается на 1. Может ли общее количество ягод равняться 2011? Ответ объясните. ***(7 баллов)***

Командный этап

1. В двух ребусах все цифры зашифрованы буквами. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры. В каждом ребусе свой шифр.

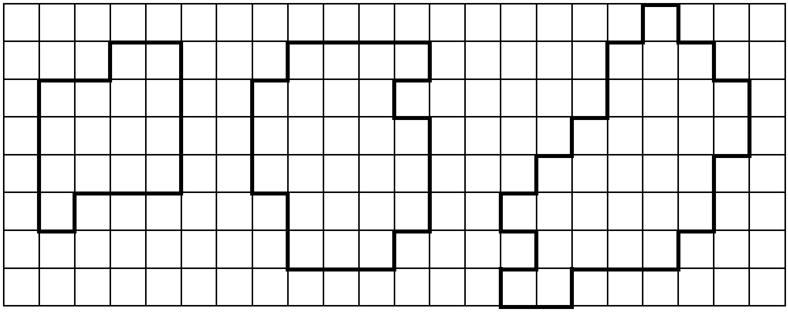
а) Замените буквы цифрами так, чтобы все равенства стали верными:

$$А \times Р = И - Ф = М : Е = Т - И = К : А$$

б) Замените буквы цифрами так, чтобы стали верными равенства, расположенные в одной строке или в одном столбце. ***(8 $\Rightarrow$ 4 балла за каждый из пунктов)***

П : У = Т
+
Е
=
Ш + Е = С
+
Т
=
В – И = Е

2. Покажите, как разрезать каждую из трех фигур на пять равных фигур. ***(8 $\Rightarrow$ 4 балла за каждую из фигур)***



3. Числовой лабиринт.

В начале этой игры вы имеете число 0 и находитесь в центральной клетке квадрата 3×3. Ваша цель – выйти из квадрата, выполнив все математические действия, которые вы встретите на своем пути, записать этот путь подробно, а главное – записать тот результат, с которым вы выходите из квадрата. Направление вашего движения каждый раз зависит от того, какой остаток от деления на 4 имеет ваше число: если оно делится на 4 без остатка, то вы идете на одну клетку вверх $(\uparrow)$; если оно при делении на 4 дает остаток 1 – на одну клетку вправо $(\rightarrow)$; если этот остаток равен 2 – на одну клетку вниз $(\downarrow)$; а если он равен 3 – на одну клетку влево $(\leftarrow)$. Может так случится, что вы попадете несколько раз в одну и ту же клетку, но направление вашего дальнейшего движения может оказаться другим (в зависимости от результата последнего действия). Если ваш очередной ход вывел вас за рамки данного квадрата, то вы вышли из числового лабиринта, то есть игра закончилась.

Поясним на примере.

+ 1	: 4	– 1
– 8	+ 8	– 4
×7	– 7	: 2

Решение.

1) $0+8=8$ (делится на 4, $(\uparrow)$)

2) $8:4=2$ (остаток 2, $(\downarrow)$)

3) $2+8=10$ (остаток 2, $(\downarrow)$)

4) $10-7=3$ (остаток 3, $(\leftarrow)$)

5) $3\times7=21$ (остаток 1, $(\rightarrow)$)

6) $21-7=14$ (остаток 2, $(\downarrow)$); вышли за границы квадрата; игра закончилась.

Ответ: 14.

Теперь попробуйте сами. На рисунке даны три квадрата. ***(6 $\Rightarrow$ 3 балла за каждый из лабиринтов)***

: 2	– 1	+ 3
×2	+ 3	: 4
+ 3	×5	– 1

: 8	+ 2	+ 1
+ 1	+ 6	– 4
+ 5	: 2	×2

×2	: 4	– 3
+ 4	+ 9	: 3
: 2	+ 7	– 2

4. Получите число.

В каждом из пунктов *а*, *б* и *в* даны четыре числа и указано число, которое надо получить из них с помощью четырех арифметических действий (+; –; ×; :). Каждое из данных чисел можно использовать ровно один раз, их порядок можно изменять. Использование скобок не разрешается, использование всех действий не требуется. ***(6 $\Rightarrow$ 3 балла за каждый пункт)***

а	6	6	8	9
б	4	6	8	9
в	2	4	5	7

							=	18
							=	21
							=	11

5. Японский кроссворд.

Клетки прямоугольников закрашены некоторым образом. Числа указывают, сколько подряд идущих клеток закрашено в данной вертикали или горизонтали. Например, над некоторым столбцом написаны числа 6, 4, 1. Это означает, что в столбце закрашены три группы клеток, причем первая содержит шесть, вторая – четыре и третья – одну закрашенную клетку. Группы отделяются друг от друга одной или несколькими незакрашенными клетками. Строки читаются слева направо, а столбцы – сверху вниз.

Восстановите рисунки в таблицах. ***(12 $\Rightarrow$ 6 баллов за каждый кроссворд)***

														3	2	3		
			1	2	3	2	1	1	1	1	1	1	5	3	2	3	5	1
		3																
	1	5																
3	2	2																
	11	2																
	2	2																
		5																
		3																

											1	1	
											1	2	3
		1	1	2	8	8	8	8	8	8	2	1	1
	6												
	9												
6	1												
6	2												
	8												
	6												
	12												
	8												

Ответы, указания к решению, решения

1. Логические задачи

4. *Ответ:* лжец – B, хитрец – C.

B не может быть честным попугаем, поскольку он сказал, что он хитрец. C также не может быть честным попугаем, так как он сказал, что B – честный попугай. Значит, честный попугай – A. О B он сказал «лжец», значит C – хитрец.

5. *Ответ:* Смит.

Если предположить, что Смит оба раза сказал правду, то получается, что Браун совершил преступление и Джонс тоже оба раза сказал правду, что невозможно. Следовательно, Смит не мог оба раза сказать правду, и значит, Браун преступления не совершал, а Джонс не мог оба раза сказать правду (второе его утверждение ложно). Значит, оба раза сказал правду Браун, Джонс оба раза солгал, а Смит первый раз солгал, а второй раз сказал правду.

6. *Ответ:* 99-е.

Поскольку любые два утверждения противоречат друг другу, то верным может быть только одно утверждение. А значит, остальные 99 – ложные. Верное утверждение – «В этой тетради ровно 99 ложных утверждений».

7. *Ответ:* 1000 книг или ни одной.

Если предположить, что прав Ваня, тогда обязательно права и Маня, что противоречит условию. Допустим, что права Аня. Получается, что у Вовы книг меньше тысячи, в то же время, неверны слова Мани, следовательно, у Вовы нет ни одной книги. Теперь предположим, что права Маня. Тогда Ваня и Аня не правы, это значит, что у Вовы 1000 книг.

Примечание. Важно получить оба варианта ответа (для этого необходимо при решении задачи перебрать все варианты).

8. *Ответ:* 50.

Предположим, что все ответившие на вопрос – химики, тогда согласно их ответам алхимиков больше. Но поскольку ответивших – 51, то алхимиков не могло быть больше. Предположение не верно. Предположим также, что все ответившие – алхимики. Тогда, учитывая, что алхимики лгут, получим, что химиков больше. Аналогично предыдущему случаю получили противоречие. Значит, среди ответивших есть как химики, так и алхимики. Но они давали одинаковый ответ: алхимиков больше (не считая отвечающего). Это возможно только в том случае, если химиков и алхимиков на конференции было поровну.

9. *Ответ:* в городе A.

Выясним, из какого города был сделан звонок, учитывая, что информация о пожаре – истинна. Это не мог быть город A, так как в этом случае второй ответ был бы ложным, что невозможно для жителей A. Звонок не мог быть из города C, так как в этом случае оба утверждения либо истинны (если пожар в C), либо ложны (если пожар в другом городе), а это невозможно для жителей C. Значит, звонили из города B. Поскольку оба утверждения в этом случае являются ложными, значит, пожар в городе A.

10. *Ответ:* молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

Соединим пунктирной линией сосуд и жидкость, если по условию жидкость не может находиться в сосуде (см. рис. 18а). Затем соединим сплошными линиями сосуды и находящиеся в них жидкости (см. рис. 18б). В банке может быть только квас, тогда в бутылке – лимонад, в стакане – вода, в кувшине – молоко.

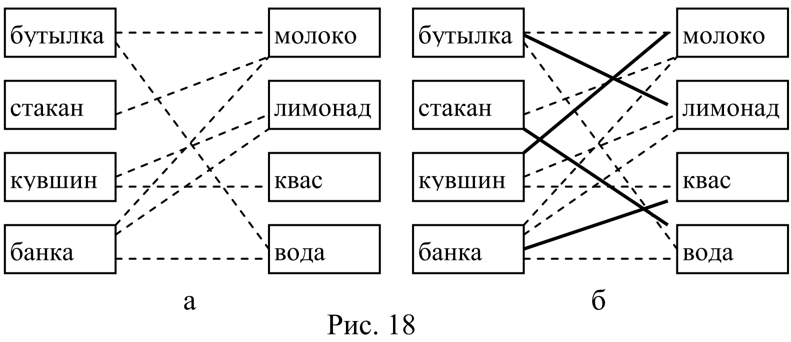


Рис. 18

11. *Ответ:* 5, 12, 19, 26, 33. $d < 90$

Заметим, что все эти числа можно определить, если знать одно из чисел и разность d двух соседних. Посмотрев на второе и третье числа (у них совпадают первые цифры), можно сказать, что они лежат в одном десятке, и их разность (равная d) не превосходит 9. А значит, прибавив d к первому (однозначному) числу, мы можем получить только двузначное число, начинающееся на 1, то есть Е = 1. Аналогично, Л = 2, С = 3. Получаем запись: Т, 12, 1К, 2А, 33. Заметим, что $1K-12=2A-1K=33-2A=d$, откуда $33-12=3d$, $d=7$. Мы восстановили последнее число и разность. Дальше легко восстановить запись: 5, 12, 19, 26, 33.

12. *Ответ:* «неразрешимая проблема».

Указание. Выпишите алфавит с номерами букв, далее, определяя буквы, учитывайте, какие цифры следуют далее.

13. *Ответ:* можно.

Пусть N – номер искомой квартиры. Если бы число N было кратно четырем, то оно было бы кратно и двум, тогда по первому условию $50<N<59$. Среди чисел этого интервала есть два числа, кратных четырем: 52 и 56. Оба эти числа не кратны трем, тогда согласно второму условию $60<N<69$. Получили противоречие. Значит, N не может быть кратно четырем. Тогда из третьего условия получаем $70<N<79$, причем N не должно быть кратно двум и должно быть кратно трем. Такое число существует, причем единственное: $N=75$.

14. *Ответ:* может.

Переправу можно осуществить следующим образом. Сначала одна из жен перевозит двух других по очереди на другой берег. Затем она возвращается, и мужья уже переправленных жен переправляются сами. Один из них перевозит свою жену обратно и возвращается на другой берег с оставшимся на этом берегу бедуином. Жена, уже переправившаяся на другой берег, возвращается и перевозит по очереди двух других жен.

15. Очевидно, что малыш и бабушка должны идти вместе. Поскольку фонарик нужно вернуть назад, малыш с бабушкой должны идти не первыми. Получаем: идут папа и мама (2 мин.), возвращается папа с фонариком (1 мин.), переходят малыш и бабушка (10 мин.), мама возвращается с фонариком (2 мин.) и переходит вместе с папой (2 мин.).

16. Приведем рассуждения ответившего мудреца (обозначим его A, а двух других – B и C). Предположим, у меня надет зеленый колпак. Тогда мудрец B, видя перед собой красный и зеленый

колпаки, должен рассуждать так: «если у меня надет зеленый колпак, то C должен был сразу определить цвет своего колпака, значит, у меня на голове красный колпак», значит, B должен был дать ответ. Но так как он ответ не дает, значит, у меня на голове красный колпак.

2. Принцип Дирихле

20. Так как в 30 классах более чем $33 \cdot 30 = 990$ учащихся, то хотя бы в одном классе более 33 учеников.

21. а) *Указание:* $n = 12$, $k = 1$.

б) *Ответ:* нет.

22. Количество ошибок для 29 учеников (не считая Вовы) – 13, от 0 до 12, при этом $29 > 13 \cdot 2$, следовательно, хотя бы три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

23. *Ответ:* нет.

Указание: посчитайте сумму всех полученных в условии сумм, а также определите последнюю цифру этой суммы при условии, что все суммы оканчиваются на разные цифры.

24. Предположим, что все ребята собрали разное количество орехов. Определим, какое наименьшее количество орехов могло быть собрано в этом случае. Для этого нужно найти сумму пятнадцати слагаемых: $0 + 1 + 2 + ... + 14 = 105$. Полученное число более 100. Следовательно, предположение о том, что все ребята собрали разное количество орехов, неверно.

25. *Указание.* Разность чисел делится на 11, если они имеют одинаковые остатки от деления на 11. «Кролики» – числа, «клетки» – остатки от деления на 11 (0, 1, 2, ..., 10; $n = 11$).

26. *Указание:* разбить все натуральные числа на n классов в соответствии с тем, какой остаток получается при делении на n (см. задачу 25).

27. *Ответ:* 26.

Выберем пять студентов, по одному с каждого курса, и подсчитаем наименьшее количество задач, придуманных ими. Поскольку количество задач, придуманных ими, различно, то всего придумано не менее, чем $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ задач. Тогда остальные 25 студентов придумали не более чем $40 - 15 = 25$ задач (т.е.

каждый из них придумал по одной задаче). Следовательно, всего по одной задаче придумали 26 человек.

28. *Ответ:* верно.

Выясним сначала, сколько существует различных наборов оценок, которые может получить школьник за три контрольных работы. За первую работу – любую из четырех оценок, за вторую – тоже любую из четырех, и т.д., всего $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта наборов оценок. Поэтому, если бы все школьники получили разные наборы оценок, то общее число школьников было бы не больше 64, а по условию их 65.

29. Разобьем данный квадрат со стороной 1 м на квадратики со стороной 0,2 м (рис. 19). Таких квадратиков будет 25. Поскольку точек в большом квадрате $51 > 25 \cdot 2$, то по принципу Дирихле в каком-нибудь из маленьких квадратиков буде не менее трех точек.

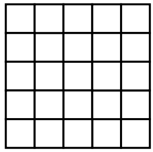


Рис. 19

30. *Указание:* см. решение предыдущей задачи, вокруг маленьких квадратиков описать окружности, найти их радиусы.

31. *Указание:* Если салфетки лежат «в один слой», то всего на столе не более 49 салфеток, «в два слоя» – не более 98 салфеток.

32. Рассмотрим прямые, параллельные данным, проходящие через одну точку. При пересечении этих прямых образовалось 14 углов, причем углы между этими прямыми равны углам между данными в условии задачи прямыми. Предположим, что каждый угол между двумя соседними прямыми не менее 26^0, тогда их сумма будет составлять не менее 364^0. Однако в сумме эти углы образуют два развернутых, т.е. 360^0. Следовательно, хотя бы один из образовавшихся углов менее 26^0.

33. *Указание:* решение аналогично решению задачи 30.

34. Чтобы координата середины отрезка была целочисленной, соответствующие координаты концов отрезка должны быть одной четности. Четность каждой координаты может иметь два значения (чет и нечет), точка на плоскости имеет две координаты, следовательно, для координат каждой точки возможны следующие варианты: (чет, чет), (чет, нечет), (нечет, чет), (нечет, нечет). Поскольку

точек 5, по принципу Дирихле найдутся две точки с координатами одинаковой четности, середина отрезка с концами в этих точках – искомая.

35. В таблице шесть строк, шесть столбцов, две диагонали, следовательно, получится 14 сумм. Поскольку складываются шесть целых чисел от -1 до 1, то суммы могут принимать целые значения от -6 до 6 (всего 13 возможных сумм). По принципу Дирихле хотя бы две из четырнадцати сумм будут одинаковыми.

36. Рассмотрим двух учеников класса, которые не дружат друг с другом. (Если таких нет, то все ученики дружат между собой, значит, у каждого ученика имеется 24 друга, и задача решена.) Обозначим этих двух учеников *А* и *Б*. Тогда из оставшихся 23 учеников каждый дружил либо с *А*, либо с *Б*. Действительно, если какой-либо ученик не дружит ни с *А*, ни с *Б*, то мы имели бы трех учеников, среди которых не было бы друзей. Теперь если предположить, что и *А*, и *Б* имеют не более 11 друзей, то всего в классе (кроме этих двоих) было бы не более 22 учеников. Полученное противоречие показывает, что один из школьников имеет не менее 12 друзей.

37. Выберем одну из данных точек. Если через нее проходит более 10 красных прямых, то задача решена. Пусть через выбранную точку проходит не более 10 красных прямых, на этих прямых лежит 100 отмеченных точек (не считая выбранной). Согласно принципу Дирихле, найдется красная прямая, на которой не менее 10 точек, вместе с выбранной – 11 точек. Рассмотрим любую точку, не лежащую на данной прямой, она соединена красными прямыми со всеми отмеченными точками. Значит, через нее проходит 11 прямых, проведенных через найденные 11 точек.

38. Отразим океан симметрично относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу. Возьмём эту точку вместе с противоположной.

3. Процессы и операции

42. Разложим числа на простые множители: $12 = 2^2 \cdot 3$, $54 = 2 \cdot 3^3$. Сумма показателей степеней двойки и тройки в разло-

жении числа 12 равна трем. После каждой операции эта сумма изменяется (увеличивается или уменьшается) на единицу, значит, после каждой нечетной операции получается четная сумма показателей, а после каждой четной операции – нечетная сумма. Чтобы получить число 54, надо выполнить нечетное число операций, т.к. сумма показателей степеней в этом числе равна четырем. А ровно через час будет совершено 60 операций, т.е. сумма показателей будет нечетной, и не может равняться четырем.

43. *Ответ*: 8.

Выпишем уже найденные числа и найдем еще несколько: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5 ... Поскольку число 5 повторилось, возникает «цикл» (числа будут повторяться): 5, 8, 11. $(2010-4):3=668$ (остаток 2), следовательно, на 2010-м месте стоит второе число цикла: 8.

44. Выберем произвольную улицу. Эта улица разбивает город на две части и вместе с одной из получившихся частей кольцевой дороги образует новое кольцо с односторонним движением, а внутри этого кольца образуется новый город, подобный Зурбагану, но меньших размеров. Так как такая операция уменьшает количество улиц, то повторив ее нужное количество раз, мы получим город, состоящий из одного квартала, то есть микрорайон, который можно объехать по правилам.

45. *Ответ*: по A литров в каждом.

Рассмотрим ситуацию, возникающую после первых двух переливаний:

Номер переливания	I сосуд	II сосуд
0	A	A
1	0,5 A	1,5 A
2	A	A

Докажем, что такая же ситуация будет возникать после любых двух последовательных переливаний с нечетным и четным номерами. При переливании с нечетным номером n во втором сосуде станет $A+\frac{A}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot A$(л), а при следующем переливании в нем останется $\frac{n+1}{n}\cdot A-\frac{n+1}{n}\cdot A\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{A}{n}\cdot(n+1-1)=A$(л). Значит, такое же количество воды будет и в первом сосуде.

46. Разобьем парламент произвольным способом на две палаты и организуем процесс «пересаживания»: выбираем парламентария, имеющего в своей палате не менее двух врагов, и пересаживаем его в другую палату, где у него не может быть более одного врага. В этом случае общее количество пар врагов, сидящих в одной палате, уменьшится, значит, такой процесс не может продолжаться бесконечно (общее количество пар врагов конечно). В тот момент, когда процесс останавливается, и будет достигнуто нужное разбиение.

47. *Ответ:* 31.

Первый способ. Пусть поток студентов, сдававших зачет, насчитывал x человек. Составим таблицу:

Дни	Пришло (чел.)	Сдало (чел.)	Осталось (чел.)
1	x	$\frac{x+1}{3}$	$\frac{2x-1}{3}$
2	$\frac{2x-1}{3}$	$\frac{2x+2}{9}$	$\frac{4x-5}{9}$
3	$\frac{4x-5}{9}$	$\frac{4x+4}{27}$	$\frac{8x-19}{27}$
4	$\frac{8x-19}{27}$	$\frac{8x+8}{81}$	$\frac{16x-65}{81}$
5	$\frac{16x-65}{81}$	$\frac{16x+16}{243}$	$\frac{32x-211}{243}$

Для того чтобы искомое количество студентов было наименьшим, должно быть наименьшим значение x, причем все числа, записанные в таблице, должны быть натуральными.

$\frac{16x+16}{243}=\frac{2^4\cdot(x+1)}{3^5}$, значит, $x+1=3^5$, то есть $x=3^5-1$.

Тогда $\frac{32x-211}{243}=31$.

Второй способ. Предположим, что вместе со студентами каждый день приходил еще один школьник, тогда можно считать, что в каждый из пяти дней ровно треть пришедших получали зачет, а две трети должны были придти на следующий день. Так как зачет принимался пять раз, то количество пришедших на зачет должно быть кратно числу 3^5, то есть в первый раз на зачет пришли $243-1=242$ студента. В этом случае непосредственным подсчетом выясняем, что после пятого раза не сдавших зачет останется 32 человека, из которых один – школьник.

48. *Ответ:* можно.

Ведро, 4 л	0	4	0	4	0	1	1	4
Ведро, 9 л	9	5	5	1	1	0	9	**6**

49. *Ответ:* можно.

Наберем воды в 16-литровое ведро, перельем в 15-литровое, в 16-литровом останется 1 л, перельем в 15-литровое ведро. Затем опять наберем воды в 16-литровое ведро, перельем 14 л в 15-литровое ведро, в 16-литровом останется 2 л. Продолжаем эти операции, в 16-литровом каждый раз количество воды будет увеличиваться на 1 л. Таким образом можно набрать 8 л воды.

50.

Ведро, 8 л	8	3	3	6	6	1	1
Бидон, 5 л	0	5	2	2	0	5	**4**
Банка, 3 л	0	0	3	0	2	2	3

51.

7 ведер	6	3	3	7	5	**5**
6 ведер	4	4	6	2	2	**5**
3 ведра	0	3	1	1	3	0

52. $15=(11-7)+11$. Поэтому сначала запустим часы одновременно, через 7 минут начнем варить кашу. Когда истечет 11 минут (каша к этому моменту варится 4 минуты), перевернем 11-минутные часы и варим кашу до конца.

53. а) *Ответ:* 3 взвешивания.

Покажем, как нужно взвешивать монеты. Первое взвешивание: на чаши весов положим по 7 монет (7 монет отложено). Если весы находятся в равновесии, то фальшивая монета среди отложенных. Если весы находятся не в равновесии, то фальшивая монета находится на той чаше весов, которая перевесила. Таким образом, после первого взвешивания удалось определить 7 монет, среди которых находится фальшивая. Второе взвешивание: на чаши весов положим по 3 монеты (одна монета отложена). Если весы в равновесии, то фальшивая монета – отложенная. В этом случае поиск фальшивой монеты завершен. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета на перевесившей чаше. Третьим взвешиванием (по одной монете на чаши весов, одну отложить) мы определим фальшивую монету.

б) *Ответ:* 5 взвешиваний.

Кратко опишем взвешивания. Первое: взвешиваем 67 и 67 (66 отложено). Второе: взвешиваем 22 и 22 (23 или 22 отложено). Третье: взвешиваем 8 и 8 (6 или 7 отложено). Четвертое: взвешиваем 3 и 3 (отложено 2 или 1 или ни одной монеты). Пятое взвешивание (если потребуется): 1 и 1 (возможно, одна монета отложена).

в) *Ответ:* k взвешиваний, где $3^{k-1} < n \le 3^k$.

Будем рассуждать по индукции (по числу взвешиваний). Найдем наибольшее количество монет, из которых мы сможем выделить фальшивую за одно взвешивание. Если на одной чаше весов при взвешивании находятся 2 монеты, то по результату взвешивания мы не сможем сказать, какая из них фальшивая, а какая настоящая. Поэтому взвесить можем не более двух монет. Если отложено не менее двух монет, то мы также не сможем выделить из них фальшивую. Значит, отложить можно также не более одной монеты. Таким образом, за одно взвешивание мы можем определить фальшивую монету из трех монет (не более). За два взвешивания можно определить фальшивую из девяти монет: по три монеты взвешиваем, три отложено (тогда за одно взвешивание определяется группа из трех монет, в которой находится фальшивая, а вторым взвешиванием – из выделенных трех монет определяется фальшивая). Аналогично рассуждая, получим, что за три взвешивания можно выделить фальшивую из 27 монет (3^3), за четыре взвешивания – из 81 монеты (3^4), ..., за k взвешиваний – из 3^k монет. Таким образом, чтобы выяснить, сколько взвешиваний потребуется для определения фальшивой из n монет, нужно найти такое число k, которое удовлетворяет двойному неравенству $3^{k-1} < n \le 3^k$. Потребуется k взвешиваний. Для определения фальшивой монеты нужно каждый раз монеты делить на три равные (или примерно равные) группы, две взвешивать, а одну откладывать.

54. *Первый способ*. Первое взвешивание: три монеты кладем на одну чашу весов, три другие – на вторую чашу (одна монета отложена). Если весы находятся в равновесии, значит, на обеих чашах находится по одной фальшивой монете. В этом случае второе взвешивание: взять две монеты с одной чаши и сравнить друг с другом. Если весы в равновесии, то эти две монеты и отложенная в первом взвешивании – искомые. Если весы при втором взвешивании не находятся в равновесии, то настоящими будут монеты: более тяжелая при втором взвешивании, третья монета с чаши и отложенная в первом взвешивании. Теперь рассмотрим случай, когда при первом взвешивании весы не находятся в равновесии. В этом случае на перевесившей чаше не может быть фальшивых монет. Действительно, если бы на ней была хоть одна фальшивая монета, то на той чаше, которая легче, должно быть по крайне мере две фальшивых монеты. Поскольку всего фальшивых монет по условию задачи две, то это невозможно. Следовательно, три монеты, лежащие на перевесившей чаше, являются искомыми.

Второй способ. Первое взвешивание: на каждую чашу положим по две монеты (три монеты отложены). Если весы находятся в равновесии, то возможны два варианта расположения фальшивых монет: либо по одной на каждой чаше, либо обе – в отложенных монетах. Чтобы это выяснить, при втором взвешивании поместим на весы монеты с одной чаши. Если весы в равновесии, то в первом взвешивании все 4 монеты на весах – настоящие. Если весы не в равновесии, то настоящими являются 3 отложенные в первом взвешивании монеты. Теперь рассмотрим случай, когда при первом взвешивании весы не находятся в равновесии. В этом случае на перевесившей чаше обе монеты настоящие (см. объяснение в первом способе). Вторым взвешиванием сравним друг с другом монеты с более легкой чаши. Если весы в равновесии, то обе монеты – фальшивые, все остальные – настоящие. Если весы не в равновесии, то более тяжелая монета вместе с двумя монетами с более тяжелой чаши – искомые.

55. Будем обозначать веса монет $a_1, a_2, ..., a_6$. Первым взвешиванием сравним a_1 и a_2. <u>Случай 1</u>. $a_1 = a_2$. Тогда монеты 1 и 2 настоящие. Сравним монеты 3 и 4. Если $a_3 = a_4$, фальшивые монеты – 5 и 6. Если $a_3 < a_4$, одна из фальшивых монет – 3, а вторая

находится среди 4, 5 и 6 (она выделяется сравнением a_4 и a_5). Случай $a_3 > a_4$ аналогичен. Случай 2. $a_1 < a_2$. Монета 1 – фальшивая. Вторая фальшивая монета выделяется сравнениями монет 2 и 3 и монет 4 и 5 (если при одном из взвешиваний неравенство – более легкая монета фальшивая, иначе фальшивая монета 6). Случай $a_1 > a_2$ аналогичен случаю 2.

56. а) *Ответ:* два взвешивания.

Разобьем монеты на три кучки по 6 монет. Сравниваем вес двух кучек. Если весы в равновесии, то все взвешенные монеты настоящие, а фальшивая монета в отложенной кучке. Тогда вторым взвешиванием сравниваем одну из уже взвешенных кучек с отложенной кучкой, по результату взвешивания будет ясен ответ на вопрос задачи. Если же при первом взвешивании одна из кучек перевесила, то в отложенной кучке все монеты настоящие, сравниваем ее вес с весом одной из уже взвешенных кучек.

б). *Ответ:* два взвешивания.

Рассмотрим для n три случая: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$. В первом случае решение задачи аналогично решению задачи а). Рассмотрим второй случай. Разобьем монеты на три кучки: k, k и $k + 1$ монета. Сравним первые две кучки. Если весы в равновесии, то фальшивая монета в третьей кучке, сравниваем ее с одной из уже взвешенных кучек (добавив в нее одну монету из другой взвешенной кучки). Если же при первом взвешивании весы не в равновесии, то в кучке с $k + 1$ монетой все монеты настоящие, отложим из нее одну монету и сравним оставшиеся с одной из кучек, взвешенной ранее. Случай $n = 3k + 2$ рассматривается аналогично.

57. Первые два взвешивания: сравниваем 1 и 2, затем 3 и 4 пакеты. Третьим взвешиванием сравниваем массы двух более легких пакетов, четвертым – двух более тяжелых. Таким образом, за четыре взвешивания определили самый легкий и самый тяжелый пакеты, а пятым сравниваем два средних.

58. Разобьем все монеты на 4 группы по 10 монет, обозначим эти группы *A, B, C, D*. Первым взвешиванием сравним группы *A* и *B*. Если весы в равновесии, то либо в группах *A* и *B* по одной фальшивой, либо все взвешенные монеты – настоящие. При втором взвешивании разобьем монеты группы *A* по пять. Если весы в равновесии, то монеты групп *A* и *B* являются настоящими, если не в

равновесии, то искомые – монеты групп C и D. Если же при первом взвешивании весы не находятся в равновесии, то на перевесившей чаше все монеты настоящие (см. решение задачи 54, первый способ). При втором взвешивании сравним вес монет групп C и D. Если весы в равновесии, то в этих группах все монеты настоящие. Если весы не в равновесии, то искомыми являются монеты групп, перевесивших в обоих взвешиваниях.

59. Первым взвешиванием сравним вес первой и восьмой монет. Поскольку первая легче, значит, она фальшивая, а восьмая – настоящая. При втором взвешивании на одну чашу весов положим первую и восьмую монеты, а на другую – вторую и третью. Поскольку вторая и третья легче, чем первая и восьмая, среди них фальшивых монет больше, значит, они обе фальшивые. Аналогично поступим при третьем взвешивании: на одну чашу весов положим первую, вторую, третью и восьмую монеты, четыре оставшихся – на другую. Все монеты с четвертой по седьмую – фальшивые, так как они легче, чем три фальшивые и одна настоящая.

4. Инварианты и полуинварианты

63. а) *Ответ:* нельзя.

Если стакан переворачивается четное число раз, то он оказывается в начальном положении. Поэтому чтобы поставить все стаканы дном вниз, нужно каждый стакан перевернуть нечетное число раз. Общее количество переворачиваний также будет нечетным (сумма семи нечетных слагаемых). Но по условию за один раз переворачивается 2 стакана, значит, общее количество переворачиваний – четное.

б) *Ответ:* нельзя. Решение аналогично задаче со стаканами.

в) *Ответ:* можно.

Первый раз переворачиваем все пятаки кроме первого, второй раз – кроме второго, ... , восьмой раз – все кроме восьмого. Таким образом, каждый пятак будет перевернут 7 раз, поэтому окажется в положении «гербом вниз», что и требовалось.

64. *Ответ:* нельзя.

Если количество яблок в соседних корзинах отличается на 1, то числа, выражающие это количество, будут поочередно четными и нечетными. Таким образом, получим 8 четных чисел и 8 нечетных чисел. Количество яблок во всех корзинах должно быть четным (8 четных и 8 нечетных слагаемых). Значит, 55 яблок разложить в корзины требуемым образом не удастся.

65. *Ответ:* 9.

Найдем инвариант, т.е. характеристику, которая сохраняется при переходе от числа к сумме его цифр. Таким инвариантом является делимость на 3 и 9: число и сумма его цифр либо одновременно делятся на 3 (на 9), либо не делятся. Очевидно, что данное в условии число делится и на 3, и на 9. Значит, полученное однозначное число тоже должно делиться и на 3, и на 9. Такое однозначное число одно: 9.

66. *Ответ:* можно.

Из условия задачи ясно, что количество бананов либо не изменяется (если срываются два ананаса или банан и ананас), либо уменьшается на 2 (если сорвать два банана), т.е. четность количества бананов сохраняется. Значит, если сначала количество бананов было нечетным, то оставшийся плод – банан, если количество бананов было четным – остался ананас.

67. *Ответ:* нет.

Рассмотрим разность количеств букв «ы» и «у» в одном слове. Ни одна из описанных операций не изменяет этой величины. Так как в словах «уыу» и «ыуы» эта разность различна, то эти слова не могут обозначать одно и то же.

68. *Ответ:* нет.

Рассмотрим общее количество таких разноцветных пар (не только соседних), в которых красная фишка расположена левее синей. Заметим, что четность этого показателя не изменяется при указанных операциях. В исходной ситуации этот показатель равен 1, а в желаемой ситуации – 0. Поэтому перейти от исходного положения фишек к желаемому – невозможно.

69. Легко проверить, что длина границы всего заросшего бурьяном участка (или нескольких участков) при указанных условиях не возрастает. В начальный момент она не превосходит $9 \cdot 4 = 36$, поэтому в конечный момент она не может быть равной 40 (периметр всего поля).

70. Заменим в таблице знак «+» на число 1, а знак «–» на число -1. При смене знаков у всех чисел одного столбца или одной строки произведение всех чисел в таблице не изменяется, так как одновременно меняются знаки у четырех чисел. В начальном положении это произведение равно -1, а в таблице из одних плюсов оно равно 1, поэтому нам не удастся получить таблицу из одних плюсов, что и требовалось доказать.

71. а) *Ответ:* нет.

Пронумеруем деревья по кругу с 1 по 44. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи, при каждом перелете либо не изменяется, либо изменяется (уменьшается или увеличивается) на 44. Тем самым, сохраняется остаток от деления этой суммы номеров на 44. Изначально этот остаток равен 22 (сумма равна 990), а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. Поэтому на одном дереве чижи собраться не смогут.

б) Для числа деревьев и чижей n задача решается, если n делится на 44, и не решается в противном случае.

72. Рассмотрим и преобразуем выражение:

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)>a^2+b^2,$$

то есть сумма квадратов всех данных чисел увеличилась. При каждом следующем выполнении указанной в условии операции сумма квадратов чисел либо увеличивается, либо не изменяется (если хотя бы одно из чисел, к которым применяется операция, равно нулю). Значит, мы уже не сможем получить исходный набор чисел, что и требовалось доказать.

73. Если открытая монета лежит так же, как и сначала, то она перевернута четное число раз, если же она лежит иначе, то нечетное. Петя знает, сколько раз переворачивались монеты (по количеству сказанных «Хоп!»). Знает он также четное или нечетное количество раз переворачивались незакрытые монеты (если монета переворачивалась четное число раз, то она лежит так же, как первоначально; если монета переворачивалась нечетное число раз, то ее положение изменилось на противоположное). Таким образом, он может определить, четное или нечетное количество раз переворачивалась закрытая монета, а значит, сможет сказать, как она лежит.

74. *Ответ:* нельзя.

Занумеруем лампы, начиная с горящей, по кругу числами от 1 до 12. Рассмотрим лампы с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11. Изменяя состояние любых трех ламп, мы изменим состояние ровно двух ламп из рассматриваемых. Среди них изначально горит одна лампа. Поскольку меняем каждый раз состояние ровно двух ламп из указанных, количество горящих ламп среди них всегда будет оставаться нечетным.

75. *Ответ:* нельзя.

Предположим, что можно собрать все шашки в одном секторе. Занумеруем сектора числами от 0 до 5, начиная с того, в котором собрали шашки. Тогда шашки, которые стояли в секторах с четными номерами, передвинуты четное число раз (независимо от того, в каком направлении их двигали, сколько раз меняли направление и т.д.), а шашки, стоявшие в секторах с нечетными номерами – нечетное число раз. Общее количество «передвижений» шашек получается нечетным, а так как за один раз передвигается 2 шашки, то это количество должно быть четным. Полученное противоречие опровергает наше предположение.

76. *Ответ:* 2.

Произведение чисел на доске не меняется. Действительно, $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{1/a+1/b}=ab$. Поэтому искомое произведение равно $1\cdot 2=2$.

77. а) *Ответ:* можно.

Сначала перекрасим на противоположный цвет все клетки нечетных строк, разбив их на пары (по горизонтали). Тогда получится, что чередуются белые и черные столбцы. Теперь можно перекрасить клетки белых столбцов, разбив их на пары по вертикали.

б) *Ответ:* нельзя, если угловые клетки белого цвета; можно, если угловые клетки – черные.

Рассмотрим случай с белыми угловыми клетками. На доске размером 9×9 всего 81 клетка, из которых 41 белая, 40 черных. Чтобы получить доску черного цвета, каждую черную клетку нужно перекрасить четное число раз (возможно, 0), каждую белую – нечетное количество раз, всего получается нечетное число перекрашиваний. Но каждый раз перекрашивается две клетки, поэтому общее число перекрашиваний – четное.

Покажем, как перекрасить доску размером 9×9 с черными угловыми клетками. Занумеруем строки числами от 1 до 9, а столбцы буквами: a, b, c, d, e, f, g, h, i. Перекрасим сначала клетки в столбцах a и b, h и i с четными номерами, клетки в столбцах c и d, f и g с нечетными номерами, получим столбцы a, d, f, i черного цвета, столбцы b, c, g, h – белого, в столбце e цвет клеток чередуется. Затем перекрасим клетки в четных строках в столбцах e и f, затем в столбце f перекрасим клетки 12, 13 и 16, 17. Останется перекрасить клетки 13, 14 и 17, 18 в столбце f, а также столбцы b, c, g, h – целиком, разбив клетки на пары. В результате получим черную доску.

78. Назовем характеристикой колоды количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше всего. При каждом ходе характеристика либо не меняется, либо уменьшается на 1 (полуинвариант). В последнем случае, очевидно, берется карта загаданной масти. Осталось заметить, что в начале игры характеристика колоды равнялась 13, а в конце – 0, так что по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

79. Сумма всех попарных расстояний между домами есть величина постоянная (инвариант). Предположим, что в результате обмена расстояния между новыми домами для каких-то пар жителей стали больше, чем между старыми домами (уменьшиться ни одно из них не могло по условию), тогда сумма попарных расстояний между домами должна также увеличиться, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что в результате обмена расстояние между домами любых двух жителей города не изменилось, что и требовалось доказать.

80. *Ответ:* нельзя.

Пусть на доске написано число $\overline{abcd}$. Тогда рассматриваемые операции не изменяют число M, где $M=(b+d)-(a+c)$, так как они увеличивают (или уменьшают) на единицу одно число из первой скобки и одно число из второй. Для числа 1234 число M равно двум: $M_{1234}=(2+4)-(1+3)=2$, для числа 2010 число M равно -3: $M_{2010}=(0+0)-(2+1)=-3$. Поэтому требуемое невозможно.

5. Раскраска

83. *Ответ:* нельзя.

Предположим, что можно сложить. Тогда если раскрасить полученный прямоугольник в шахматном порядке, то должно быть 10 белых и 10 черных клеток. С другой стороны, если раскрасить данные фигуры в шахматном порядке, каждая из фигур, кроме одной, будет содержать 2 белых и 2 черных клетки. Т-образная фигура будет содержать 3 клетки одного цвета и 1 клетку другого цвета. Таким образом, не удастся получить равное количество белых и черных клеток.

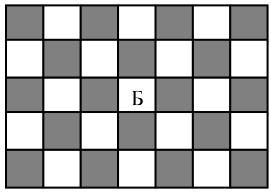


Рис. 20

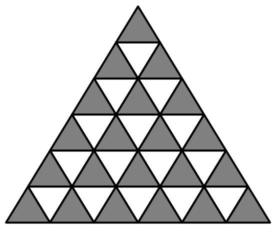


Рис. 21

84. Раскрасим комнаты в шахматном порядке (рис. 20). Получится 18 комнат черного цвета и 16 комнат (не считая бассейна) белого цвета. Проходя через дверь в стене, переходим из комнаты одного цвета в комнату другого цвета. Получается, что в последовательности комнат происходит чередование цветов, значит, в цепочке ч, б, ч, б, … количество черных и белых комнат будет либо одинаковым (если начало и конец цепочки разные по цвету), либо отличаться на 1 (если начало и конец совпадают по цвету). Поэтому пройти 18 комнат черного цвета и 16 комнат белого цвета не удастся.

85. *Ответ:* 31 зал.

Раскрасим залы в два цвета в шахматном порядке (рис. 21). Залов белого цвета будет 15, черного – 21. Поскольку цвета залов в цепочке чередуются (см. решение задачи 84), то всего в ней не более $15+16=31$ зала. Чтобы осмотреть 31 зал можно начать обход с углового зала, идти вдоль стены, не заходя в последний зал, перейти в следующий ряд залов и т.д.: $10+8+6+4+2+1=31$.

86. *Ответ:* k^2-k+1.

Раскрасим треугольнички в шахматном порядке (рис. 21). Треугольников одного цвета будет $1+2+\ldots+(k-1)=\dfrac{k(k-1)}{2}$, другого $1+2+\ldots+k=\dfrac{(k+1)k}{2}$. Поскольку цвета треугольничков в цепочке чередуются, то всего в ней не более $\dfrac{k(k-1)}{2}+\dfrac{k(k-1)}{2}+1=k^2-k+1$ треугольников.

87. *Ответ:* нет.

Раскрасим кубики в два цвета в шахматном порядке, тогда без учета центрального кубика получится 14 кубиков одного цвета и 12 кубиков другого цвета. Так как любые два соседних кубика, имеющих общую грань, будут иметь разные цвета, то хотя бы один кубик останется несъеденным.

88. Раскрасим доску в два цвета в шахматном порядке, чтобы получилось 13 черных и 12 белых клеток. Поскольку соседние клетки имеют разные цвета, жуки с черных клеток перелетели на белые, а с белых – на черные. Значит, на 13 черных клеток перелетели 12 жуков, и хотя бы одна черная клетка освободилась.

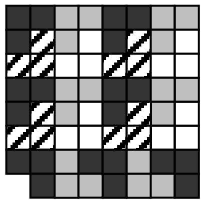


Рис. 22

89. *Ответ:* Можно (см. рис. 22).

90. Раскрасим клетки игровой доски в черный и белый цвета в шахматном порядке. Тогда при каждом ходе цвет клетки, в которой находится пустое поле, меняется. Изначально пустое поле находится в правой нижней клетке, которая, допустим, окрашена в белый цвет. Значит, после каждого нечетного хода пустое поле находится на черной клетке, а после четного – на белой. В результате оно оказалось на белой клетке, значит, всего было сделано четное число ходов.

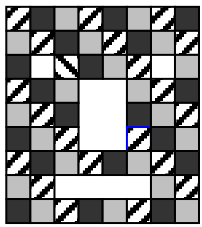


Рис. 23

91. *Ответ:* нельзя.

Раскрасим фигуру в шахматном порядке в три цвета (см. рис. 23). Если предположить, что удастся фигуру замостить двадцатью прямыми тримино, то каждая тримино (независимо от ее расположения в фигуре) должна содержать клетки всех трех цветов. Таким образом, в фигуре должно быть по 20 клеток каждого цвета. Легко посчитать, что в фигуре 20 клеток одного цвета, 19 другого и 21 – третьего. Полученное противоречие доказывает, что нельзя выполнить требуемое.

92. *Ответ:* нельзя.

Начав с поля $a1$, конь должен сделать в соответствии с условием задачи всего 63 хода. При каждом ходе коня цвет поля меняется на противоположный, после 63 ходов цвет поля должен быть противоположным цвету поля $a1$, а поле $h8$ имеет тот же цвет.

93. *Указание:* используйте раскраску в три цвета, сравните количество клеток одного цвета в первоначальном варианте и после замены одной фигурки.

94. *Ответ:* нет.

Выполним шахматную раскраску прямоугольника. Черных и белых клеток по 66. Если предположить, что можно разрезать прямоугольник на Т-тетрамино, то получатся тетрамино двух видов (см. рис. 24). Предположим, что тетрамино первого вида – m, второго вида – n. Тогда черных клеток в прямоугольнике будет $3m+n=66\,(1)$, а белых – $m+3n=66\,(2)$. Сложив равенства (1) и (2) и разделив полученное равенство на 4, получим $m+n=33$. Если же вычесть из (1) равенство (2) и преобразовать полученное равенство, то получим $m=n$. Но тогда сумма m и n должна быть четной, и не может быть равна 33.

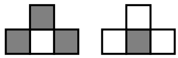


Рис. 24

95. *Ответ:* нет.

Указание: для доказательства используйте раскраску доски в 4 цвета (см. решение задачи 82).

96. *Ответ:* можно.

Поскольку при каждом ходе «слоненка» меняется номер ряда, в котором он находится, можно нечетные горизонтальные ряды покрасить одним цветом, а четные – другим.

97. Предположим, что в разных строках клеток одного цвета разное количество. Посчитаем наименьшее возможное количество клеток одного цвета во всей таблице: $0+1+2+...+14=105$. Поскольку в таблице находятся клетки трех цветов, то всего в таблице не менее $105\cdot 3=315$ клеток. На самом деле клеток $15\cdot 15=225$.

98. Рассмотрим на прямой две произвольные точки X и Y, окрашенные в один цвет. Рассмотрим также три следующие точки:

точку X_1 – образ точки X относительно Y, Y_1 – образ точки Y относительно X и точку O – середину отрезка XY. Если хотя бы одна из этих трех точек окрашена в тот же цвет, что и точки X и Y, то она вместе с ними образует искомую тройку. Если все эти три точки окрашены в другой цвет, то они будут искомой тройкой.

6. Наибольшее, наименьшее

101.а) *Ответ:* 8.

Пример размещения восьми ладей в соответствии с условием задачи представлен на рис. 25. Покажем теперь, что невозможно поставить более восьми ладей. В каждом горизонтальном ряду можно поставить не более одной ладьи, иначе они будут бить друг друга, всего рядов 8, поэтому всего может быть не более 8 ладей.

б) *Ответ:* 14.

Пример расположения 14 слонов на доске в соответствии с условием задачи приведен на рис. 26. Покажем теперь, что невозможно поставить более 14 слонов. Посчитаем количество диагоналей на доске (в одном направлении). Их 15. В каждой диагонали может находиться не более одного слона. Кроме того, две крайние диагонали состоят каждая из одной точки, причем слоны, стоящие в них, бьют друг друга. Поэтому на 15 диагоналях могут стоять не более 14 слонов.

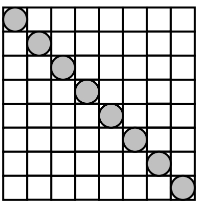


Рис. 25

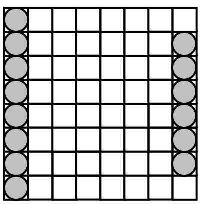


Рис. 26

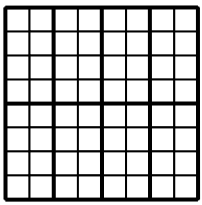


Рис. 27

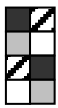


Рис. 28

в) *Ответ:* 32.

Конь, стоящий на белой клетке, бьет только черные клетки, поэтому коней можно поставить на все клетки одного цвета, они не буду бить друг друга. Покажем, что более 32 коней поставить на доску нельзя. Разобьем шахматную доску на 8 прямоугольников размером 2×4 (рис. 27). В таком прямоугольнике можно разместить не более 4 коней, покажем это. Раскрасим клетки прямоугольника в 4 цвета (рис. 28), на клетки одного цвета нельзя одновременно поставить коней, т.к. они будут бить друг друга. Итак, в прямоугольнике не более 4 коней, прямоугольников 8, поэтому всего не более 32 коней.

102. *Ответ:* 3 хода.

Покажем, что за 3 хода можно перевернуть все карточки. Занумеруем карточки числами от 1 до 7. Первым ходом перевернем карточки с первой по пятую, вторым – со второй по шестую. В результате перевернутыми окажутся первая и шестая карточки. Третьим ходом перевернем оставшиеся пять.

Теперь докажем, что меньшим числом ходов не обойтись. Очевидно, что за один ход не перевернуть все карточки. Остается доказать, что двух ходов тоже не достаточно. Первым ходом переворачиваются любые пять карточек, после чего неперевернутыми останутся две. Значит, делая второй ход, мы вынуждены перевернуть не менее трех карточек, перевернутых за первый ход, и они окажутся в первоначальном положении. Значит, за два хода не удастся добиться требуемого результата.

103. *Ответ:* 10.

Приведем пример, содержащий 10 дробей с целыми значениями: $\frac{22}{11},\frac{21}{7},\frac{20}{10},\frac{19}{1},\frac{18}{9},\frac{17}{13},\frac{16}{8},\frac{15}{5},\frac{14}{2},\frac{12}{4},\frac{6}{3}$. Покажем, что все 11 дробей не могут иметь целые значения. Среди данных чисел три числа (13, 17, 19) могут образовывать дробь, принимающую целое значение, только с единицей. Поскольку карточку с числом 1 можно использовать только один раз, не менее одной дроби будет принимать нецелое значение.

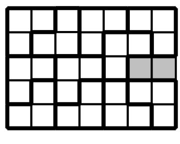
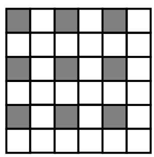


Рис. 29

104. *Ответ:* 11.

Пример размещения 11 прямоугольников представлен на рис. 29. Если предположить, что можно расположить 12 уголков, то всего будет 36 клеток, а в прямоугольнике размером 5×7 всего 35 клеток.

105. *Ответ:* 9.



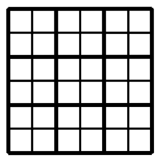


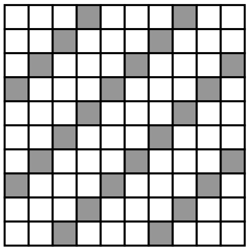
Рис. 30 Рис. 31

Пример покраски представлен на рис. 30. Для оценки разобьем доску на квадраты размером 2×2 (рис. 31). В каждом таком квадрате может быть не более одной покрашенной клетки, т.к. все клетки одного квадрата имеют общую точку. Поскольку всего квадратов 9, то и клеток не может быть более девяти.

106. *Ответ:* 24.

Покажем, что 24 выстрелов хватит. Произведем выстрелы по полям, отмеченным на рис. 32а. Любое положение корабля 1×4 накрывает одно отмеченное поле. Поэтому 24 выстрелов хватит.

Покажем, что меньшего числа выстрелов не хватит. Разместим на доске 24 корабля 1×4 (рис. 32б). В каждый из них должен попасть выстрел. Значит, нужно сделать не менее 24 выстрелов.


а

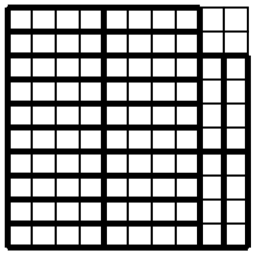

б

Рис. 32

107. *Ответ:* 6.

Легко проверить, что монеты достоинством в 1, 3, 5, 7, 9 и 10 рублей удовлетворяют условию задачи. Покажем, что пяти типов монет не хватит. В самом деле, имея пять типов монет, мы сможем с соблюдением условий задачи уплатить не более 20 денежных сумм: 5, беря по одной монете; 5, беря по две одинаковые монеты; и еще не более 10, беря по две различные монеты. Поскольку требуется, чтобы мы могли уплатить ровно 20 различных сумм, все перечисленные выше суммы должны быть различными. Кроме того, поскольку все суммы, которые требуется уплатить, равны целому числу рублей, каждая из монет должна быть достоинством в целое число рублей (она тоже составляет одну из искомых сумм). Поэтому обязательно должна быть монета достоинством в 1 рубль. Тогда двухрублевой монеты нет (иначе сумму в 2 рубля можно было бы уплатить двумя способами), а трехрублевая обязательно есть, четырехрублевой нет ($4 = 3 + 1$), а пятирублевая есть. Но тогда получается, что сумму в 6 рублей можно составить двумя способами: $6 = 5 + 1 = 3 + 3$. Значит, сделать 20 сумм различными не удастся.

108. *Ответ:* за четыре взвешивания.

Докажем сначала, что трех взвешиваний может не хватить, чтобы наверняка отыскать все фальшивые монеты. Занумеруем монеты по порядку слева направо: 1,2, …, 96. Самая левая фальшивая монета может иметь номер от 1 до 78 – всего 78 вариантов. После каждого взвешивания может быть три результата: перевесила левая чаша весов, перевесила правая чаша, весы находятся в равновесии. Значит, после первого взвешивания фальшивая монета с минимальным номером находится (в зависимости от результата) в одном из трех множеств. При этом в одном из них не менее $78:3=26$ элементов. Если монета оказалась именно в этом множестве, то после второго взвешивания указанная монета находится в одном из трех множеств, большее из которых содержит не менее 9 элементов ($26:3>8$). Аналогично после третьего взвешивания монета может оказаться в множестве, содержащем не менее $9:3=3$ элементов, то есть не определяется однозначно. Таким образом, трех взвешиваний недостаточно.

Покажем теперь, как найти все фальшивые монеты за четыре взвешивания. При первом взвешивании положим на левую чашу весов 27 монет с номерами 1, 2, …, 27, а на правую – 27 монет с номерами 70, 71, …, 96. Если весы будут находиться в равновесии, то все эти монеты – настоящие, а фальшивые – какие-то 19 лежащих подряд монет из оставшихся 42 монет (для удобства будем считать, что фальшивые монеты – среди 45 монет с 28-й по 72-ю, хотя про монеты 70, 71, 72 уже точно известно, что они настоящие). Если при первом взвешивании перевесит, например, правая чаша (случай с левой чашей аналогичен), то на левой чаше была хотя бы одна фальшивая монета, то есть фальшивые монеты – какие-то 19 монет из 45 монет (с 1 по 45). При втором взвешивании положим на левую чашу девять монет с наименьшими номерами (из 45 подозрительных монет), а на правую – девять монет с наибольшими номерами (из тех же 45 монет). Разбирая возможные исходы этого взвешивания, аналогично предыдущему, получим 9 вариантов для самой левой фальшивой монеты, то есть остаются подозрительными 27 монет (среди них 19 фальшивых). При третьем взвешивании положим на левую чашу три монеты с наименьшими номерами (из 27 подозрительных монет), а на правую – три монеты с наибольшими номерами (из тех же 27 монет). Разбирая возможные исходы этого взвешивания, аналогично предыдущему получим три варианта для самой левой фальшивой монеты, то есть остаются подозрительными 21 монета. Теперь осталось сравнить веса крайних монет (из оставшихся подозрительными 21 монеты).

109. *Ответ:* $n=3$.

Пример для $n=3$ очевиден (годится любая расстановка). Предположим, что при некотором $n>3$ удалось найти расстановку, удовлетворяющую условию задачи. Тогда после каждого четного числа против хода часовой стрелки стоят два числа одинаковой четности (сумма двух чисел разной четности нечетна и не может делиться на четное число). Рассмотрим два случая. 1) Хотя бы для одного четного числа оба его «предшественника» четны. Тогда рассмотрим ближайшее к ним против хода часовой стрелки нечетное число. Следующие за ним по ходу часовой стрелки два числа четны, но «нечет» + «чет» не может делиться на «чет». 2) Для каждого четного числа оба его «предшественника» нечетны. Тогда между каждыми двумя четными числами стоит, по крайней мере, два нечетных. Если четных чисел на окружности k то нечетных – не меньше $2k$. Но разность между количеством нечетных и количеством четных чисел не больше 1, следовательно $k \le 1$, тогда $n \le 3$.

110. *Ответ:* $N=14$.

Заметим, что изображения чисел 1111, 2112 и 2122 не могут иметь общих единиц, а изображения чисел 2222, 1221 и 1211 – общих двоек. Следовательно, если все эти числа встречаются среди изображенных, то по кругу должны располагаться не менее 14 цифр – 7 единиц и 7 двоек. Пример расположения цифр для $N=14$ показан на рис. 33.

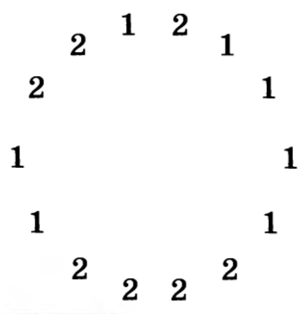


Рис. 33

7. Принцип крайнего

113. Предположим, что нашелся выпуклый многогранник, у которого любые две грани имеют разное число сторон. Рассмотрим у него грань с наибольшим числом сторон (пусть их n). Тогда у этой грани есть n соседних граней. Но у них может быть от 3 до $n-1$ сторон, то есть по принципу Дирихле, из них можно выбрать две с одинаковым числом сторон. Полученное противоречие доказывает требуемое.

114. Рассмотрим две планеты A и B, расстояние между которыми наименьшее. Из условия следует, что астроном на планете A смотрит на планету B, а астроном на планете B смотрит на планету A. Далее возможны два варианта. Первый: астроном с какой-нибудь другой планеты (из оставшихся 2009 планет) смотрит на планету A или B, тогда найдется планета, на которую никто не смотрит (так как на оставшиеся 2009 планет смотрит не более 2008 астрономов). Второй вариант: на планеты A и B больше никто не смотрит. Тогда, исключив из рассмотрения планеты A и B, получим систему из 2009 планет, для которой выполняется условие задачи. Поскольку число планет нечетно, то продолжая рассуждать аналогичным образом, мы придем к тому, что останется одна планета, на которую никто не смотрит.

115. *Ответ:* нет.

Предположим, что получилась замкнутая ломаная $ABCD...A$. Рассмотрим LM – наибольшее звено этой ломаной и звенья KL и MN, соседние с ним. Тогда, так как $KL < LM$, точка M – не ближайшая к точке L. Аналогично, так как $MN < LM$, точка L – не ближайшая к точке M. Следовательно, точки L и M не могли быть соединены, то есть замкнутая ломаная получиться не может.

116. Рассмотрим депутата, пришедшего на заседание последним. До его прихода ни один из депутатов не мог уйти, так как в противном случае ушедший не мог встретиться с последним пришедшим. Значит, в момент прихода последнего все депутаты присутствовали на заседании.

117. Рассмотрим наибольшее из записанных чисел. Так как среднее арифметическое чисел не превосходит наибольшего из них, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа равны между собой, то рассмотренное число равно каждому из своих соседей. Аналогичные рассуждения можно провести для

каждого из этих соседей и т.д. Поскольку количество чисел конечно, то все числа равны между собой. *Примечание:* решение не зависит от того, как определять соседние клетки (по стороне, по диагонали и т.д.).

118. Рассмотрим две точки A и B, наиболее удаленные друг от друга (среди данных n точек). Пусть C – середина отрезка AB и $AC = BC = R$. Середины всех отрезков, одним из концов которых является точка A, принадлежат кругу с центром A и радиусом R (таких середин отрезков $n-1$). Аналогично середины всех отрезков, одним из концов которых является точка B, принадлежат кругу с центром B и радиусом R (тоже $n-1$). Так как эти два круга имеют только одну общую точку C (она входит в оба набора), то отмеченных середин будет не менее, чем $(n-1)+(n-1)-1 = 2n-3$.

119. Рассмотрим произвольную прямую a и ближайшую к ней точку A пересечения двух других прямых l_1 и l_2. Тогда треугольник, образованный прямыми a, l_1 и l_2 не пересекает ни одна другая прямая, так как в этом случае нашлась бы точка пересечения прямых, лежащая к прямой a ближе, чем точка A.

120. Пусть $a_1, a_2, ..., a_{21}$ – данные числа, записанные в порядке возрастания. Разобьем сумму всех чисел на группы по пять слагаемых (каждая такая сумма по условию положительна) и число a_{21} (оно наибольшее, поэтому также является положительным). Тогда сумма всех чисел равна сумме пяти положительных слагаемых: $a_1 + a_2 + ... + a_{21} = (a_1 + ... + a_5) + ... + (a_{15} + ... + a_{20}) + a_{21}$.

121. а) *Ответ:* 1, 2, 3, 4, 5, 7.

Расположим числа в порядке возрастания. Тогда очевидно, что каждое число будет не меньше своего номера. Найдем сумму номеров всех чисел: $1+2+3+4+5+6 = 21$. Эта сумма на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число на единицу больше своего номера, а остальные – равны своему номеру. Числом, большим своего номера, может быть только последнее. Действительно, если какое-то число больше своего номера, то все последующие числа тоже больше своего номера.

б) *Ответ:* 1, 2, …, 99, 101.

Решение аналогично. Сумма номеров всех чисел равна 5050: $1+2+...+100=(1+100)+(2+99)+...+(50+51)=50\cdot101=5050$, она также на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число (последнее) на единицу больше своего номера, а остальные – равны своему номеру.

122. *Ответ:* $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0$.

Из условия следует, что каждое из записанных чисел неотрицательно. Обозначим наибольшее из чисел (или одно из них) a_1, а следующие за ним по часовой стрелке – $a_2,...,a_6$. По условию $a_1=|a_2-a_3|$, учитывая, что a_1 – наибольшее, получаем, что одно из чисел a_2 и a_3 равно a_1, а другое равно нулю. Рассмотрим далее числа a_2, a_3 и a_4, по условию $a_2=|a_3-a_4|$, поскольку одно из чисел a_2 и a_3 равно нулю, то a_4 равно другому из этих чисел (и равно a_1). Рассуждая далее таким же образом, получим, что среди шести чисел два равны нулю, а остальные равны между собой. Учитывая, что сумма всех чисел равна 1, получим ответ.

123. Пусть B – наибольший внутренний угол данного четырехугольника $ABCD$. Проведем разрез BM из вершины B, параллельный стороне AD (точка M попадет внутрь четырехугольника). Из точки M проводим разрезы MN и MK, параллельные сторонам BC и CD соответственно (рис. 34).

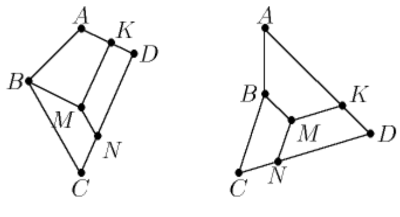


Рис. 34

124. *Ответ:* одна проверка.

Пете достаточно проверить, можно ли составить треугольник из двух самых коротких палочек и одной самой длинной. Если треугольник не составляется, то утверждение инструкции опровергнуто. Если же треугольник составить можно, то сумма длин двух самых коротких палочек больше длины самой длинной. Но в этом случае сумма длин двух любых палочек набора длиннее любой другой. (Действительно, сумма длин двух любых не меньше суммы длин самых коротких, а длина любой палочки не больше длины самой длинной.) А это и означает, что из любых палочек можно составить треугольник, т.е. утверждение инструкции доказано.

8. Игровые задачи

8.1. Поиск стратегии с конца

128. *Ответ:* второй.

Указание. В этой игре выигрышными являются соответственно ходы 99, 88, …, 11. Первый выигрышный ход не может сделать первый игрок. Следовательно, выигрывает второй игрок, называя каждый раз число, кратное 11.

129. *Ответы:* а) первый, б) первый, в) первый, г) второй, д) первый (в этом варианте игры повторяющаяся серия начинается только с клетки с номером 6).

В таблице представлены выигрышные и проигрышные позиции для каждой задачи (в скобки заключена повторяющаяся серия позиций):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	23	24
а	(в	п	п)	в	п	п	в	п	п	в	п	…	п	в
б	(в	п	в	п	п	п	п)	в	п	в	п	…	в	п
в	(в	п	п	в	п	п	п)	в	п	п	в	…	п	в
г	(в	в	п	п	в	п	п)	в	в	п	п	…	п	п
д	в	в	п	п	п	п	(в	п	п)	в	п	…	п	в

130. *Ответ:* первый.

Нужно оставлять сначала 24 камня, затем 20 и т.д. (число, кратное 4).

131. *Указание:* игра, изоморфная игре 129 (д).

132. *Ответ:* первый.

Для того чтобы своим ходом получить ровно 200 камней, надо предыдущим своим ходом получить 189 камней, перед этим – 178 камней и т.д. Эти числа можно записать в виде $11k+2\ (k \in N,\ k \leq 18)$. Наименьшее из таких чисел, превышающих 50, является число 57. Следовательно, первый игрок может выиграть, первым ходом добавив 7 камней, а далее на любой ход противника отвечать дополнением количества поставленных противником камней до 11 (на ход противника n камней первый должен отвечать ходом $11-n$ камней).

133. *Ответ:* первый.

Решать задачу будем с конца, т.е. с поля *a1*. Это поле является выигрышным. Отметим как проигрышные все поля, с которых за один ход можно попасть на поле *a1*: это все поля в соответствующих горизонтальной, вертикальной и диагональной линиях (см. рис. 35а). Рассмотрим поля *c2* и *b3*. С каждого из этих полей за один ход можно попасть только на проигрышные поля, поэтому они являются выигрышными. Отметим все поля, с которых можно попасть на эти поля за один ход как проигрышные (см. рис. 35б). Рассуждая так дальше, мы для всей шахматной доски определим проигрышные и выигрышные поля (см. рис. 35в). С поля *f8*, на котором стоит ферзь, первым ходом можно попасть на выигрышное поле, значит, выигрывает первый игрок.

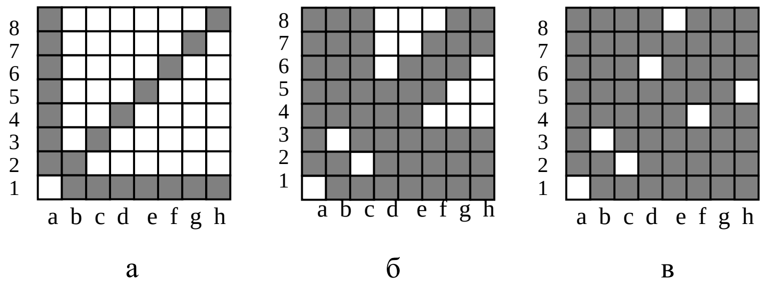


Рис. 35

Изоморфная игра: Имеется две кучки камней, в одной 7 камней, в другой – 5. Игрок за один ход может взять любое количество камней из одной кучки или равное количество камней из обеих кучек. Выигрывает тот, кто берет последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

134. *Ответ:* число должно оканчиваться на ноль.

Чтобы последним ходом получить ноль, нужно, чтобы было записано однозначное число. Чтобы «заставить» соперника записать однозначное число, нужно перед его ходом записать 10. Опишем выигрышную стратегию для Зайца. После хода Волка получится число с ненулевой последней цифрой. Своим ходом Заяц должен вычесть последнюю цифру, в результате получится число, оканчивающееся на 0. Продолжая так же далее, после некоторого количества ходов Заяц запишет 10. Какое бы число Волк не вычел, следующим ходом Заяц получит ноль. Если же первоначальное число не будет оканчиваться на 0, то Волк вычтет последнюю цифру и дальше воспользуется описанной выигрышной стратегией.

8.2. Симметрия

138. *Ответ:* первый.

Первым ходом закрашивает центральную клетку, далее ходит симметрично ходам второго игрока относительно центра доски.

139. *Ответ:* первый.

Первым ходом провести хорду таким образом, чтобы на двух образовавшихся дугах окружности находилось равное количество точек, далее делать ходы симметрично ходам второго игрока относительно первой проведенной хорды (соединять соответственные точки).

140. *Ответ:* первый.

Первым ходом забрать одну кучку камней целиком, далее брать столько же камней, сколько и второй, но из другой кучки. *Примечание:* первым ходом забрав одну кучку камней, первый игрок сводит игру к игре в задаче 137, причем становится в ней вторым игроком.

141. *Ответ:* первый.

Первым ходом свести к задаче 137.

142. *Ответ:* первый.

Первым ходом закрасить квадрат 2×2 (рис. 36), а дальше делать ходы, симметричные ходам второго игрока относительно вертикальной оси симметрии прямоугольника.

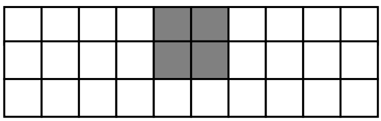


Рис. 36

143. *Ответ:* первый.

Первым ходом нужно создать симметричную картину. Для этого в случае нечетного количества минусов нужно переправить центральный минус на плюс, а в случае четного количества минусов – два центральных минуса. Далее ходы делать симметрично ходам второго игрока.

144. а) *Ответ:* второй.

Сначала второй игрок разламывает соты симметрично предыдущему ходу первого игрока: если первый разломил по вертикальной линии, то симметрично относительно вертикальной оси симметрии, если первый разломил вдоль горизонтальной линии, то второму нужно разломить симметрично относительно горизонтальной оси симметрии.

б) *Ответ:* первый.

Первым ходом нужно разломить вдоль горизонтальной линии, отделяющей верхние три рядка от шести нижних. Таким образом, получатся симметричные соты, далее воспользоваться стратегией второго игрока из игры а).

в) *Ответ:* второй.

Ходы нужно делать симметрично относительно диагонали, на которой находится клеточка с дегтем. Например, если первый разломил вдоль горизонтальной линии, отделяющей верхние четыре рядка от пяти нижних, то второй должен разломить вдоль вертикальной линии, отделяющей правые четыре рядка от пяти левых. В результате все время будет получаться симметричная ситуация, в которой второй всегда будет иметь ответный ход.

145. *Ответ:* второй.

Ходы нужно делать симметрично ходам первого игрока относительно оси симметрии доски (вертикальной или горизонтальной, но все время относительно одной и той же).

146. *Ответ:* второй.

Первым ходом второму игроку нужно сделать так, чтобы оставшиеся лепестки ромашки образовали две равные группы подряд растущих лепестков. Если у ромашки первоначально четное число лепестков, то после первого хода первого игрока второй игрок делает симметричный относительно центра ромашки ход. Если у ромашки нечетное количество лепестков, то если первый оторвал один лепесток, второй должен оторвать два, расположенные напротив только что оторванного лепестка, а если первый оторвал два лепестка – аналогично нужно оторвать один лепесток. Далее ходы нужно делать симметрично ходам первого игрока.

147. *Ответ:* первый.

Так как каждое из чисел, стоящих на угловых клетках, войдет в обе суммы, то заполнение этих клеток не влияет на результат игры (как и число, записанное в центральной клетке). Оставшиеся четыре клетки (назовем их результативными) выгодно заполнять так, чтобы оказаться последним. Этого может добиться первый игрок, начав, например, с заполнения центральной клетки, а затем отвечая на любой ход второго игрока ходом, симметричным относительно центральной клетки. Как только на результативных клетках будут записаны три числа (третье запишет второй игрок), первый игрок сможет записать подходящее четвертое число.

148. *Ответ:* у второго.

Указание: использовать центральную симметрию.

149. *Ответ:* первый.

Первым ходом нужно снять центральную шашку, затем делать ходы центрально-симметрично ходам второго игрока.

150. *Ответ:* первый.

В этой игре проигрывает тот, кто отломит полоску ширины 1. Первый сначала должен разделить шоколадку на две части размером 5×5, а затем действовать симметрично ходам второго игрока.

151. *Ответ:* у первого.

Первым ходом он ставит крестик в центральную клетку. Затем после каждого хода второго игрока ставит крестик в центрально-симметричную клетку.

8.3. Разные игры

153. *Указание:* используется прием «передачи хода» (первым ходом можно вычеркнуть либо только число 1, либо другое число вместе с его делителями, в том числе и 1).

154. *Ответ:* первый.

Сначала первый игрок должен закрасить правую верхнюю клетку, а затем ходить так, чтобы каждый раз оставалась незакрашенной фигура одной и той же формы «ступенька» (рис. 37). Первый игрок может воспользоваться этой стратегией: если второй закрашивает несколько клеток только в правом столбце, нужно закра-

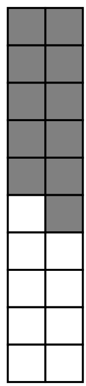


Рис. 37

сить клетки в левом столбце, оставив «ступеньку». Если же второй игрок закрашивает клетки в обоих столбцах, то в результате будет закрашено равное количество клеток в обоих столбцах, тогда первый закрашивает одну клетку в правом столбце. Через несколько ходов, перед очередным ходом второго игрока останется незакрашенной только одна клетка (левая нижняя), которую второй вынужден будет закрасить.

155. а) Пусть n четно. Тогда первый игрок мысленно разбивает доску на «доминошки», далее пользуется стратегией «закрыть доминошку». Перед ходом первого игрока фишка стоит на одной клетке «доминошки», ход нужно сделать на вторую клетку, второй игрок делает ход на незакрытую «доминошку», первый «закрывает» ее и т.д. Таким образом, первый игрок может гарантировать себе ответный ход и выигрыш.

Пусть n нечетно. Тогда вся доска за исключением клетки, на которой стоит фишка, разбивается на «доминошки», и второй игрок может воспользоваться стратегией «закрыть доминошку» и выиграть.

б) *Ответ:* первый.

Пользуется той же стратегией. Для четного n обоснование очевидно. Пусть n нечетно. Докажем, что второй игрок не сможет сделать ход на свободную угловую клетку. Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Первоначально фишка стоит на белой клетке, первый игрок будет ходить на черные клетки, второй – на белые, следовательно, он не сможет сделать ход на угловую (черную) клетку. Поэтому первый игрок сможет воспользоваться стратегией «закрыть доминошку».

156. *Ответ:* при правильной игре получается ничья.

Каждый может покрасить три взаимно скрещивающихся ребра (сразу «пометить» все грани).

157. *Ответ:* второй.

В начале партии второй игрок должен стирать числа, кратные трем, до тех пор, пока таких не останется. Так как количество чисел, кратных трем и не превосходящих 1000, равно 333, то второму понадобится не более 333 ходов (некоторые числа, кратные трем, могут быть стерты и первым игроком). После этого второй игрок делает свои ходы произвольно до того момента, пока останется три числа (после каждого хода первого игрока остается нечетное количество чисел). Каждое из трех оставшихся чисел будет давать остаток 1 или 2 при делении на 3, поэтому среди них обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки, именно их второй игрок и должен оставить.

158. *Ответ:* не может.

Проведём (за Ваню) сначала среднюю фишку (крайняя и так пройдёт). Будем двигать её вперёд, не обращая внимания на ходы Серёжи. Докажем, что она пройдёт. Назовём номер горизонтали, на которой фишка стоит (считая снизу), её высотой. Если Ванина фишка окажется между Сережиными, то её удвоенная высота $2h$ будет равна сумме высот Сережиных фишек (если они на одной горизонтали, то это очевидно; если же Ванину фишку «зажали» по диагонали, то сумма высот Сережиных фишек будет равна $h-1+h+1=2h$). Это может произойти либо после Сережиного хода, либо после Ваниного. Пусть это произошло после хода Серёжи. Значит, ребята сделали равное число ходов – по n, и сумма высот Сережиных фишек равна $n+2$ (перед началом игры она равна 2), а высота Ваниной равна $6-n$ (перед началом игры она равна 6). Получаем $n+2=12-2n$, то есть $12=3n+2$, что, очевидно, неверно, так как 12 делится на 3. Теперь рассмотрим другой случай: Ванину фишку «зажали» после его хода. Значит, Ваня сделал на один ход больше: Серёжа сделал n ходов, а Ваня $n+1$. Тогда сумма высот Сережиных фишек равна $n+2$, а высота Ваниной равна $6-n-1$. Получаем $n+2=10-2n$, т.е. $12=3n+4$, что, очевидно, неверно.

159. *Ответ:* первый.

Сначала поставить любое число во втором равенстве, затем – каждый раз в том же равенстве, что и второй.

160. *Ответ:* первый может выбрать числа указанным образом.

Если первый игрок назовет такие три числа, сумма которых равна нулю, то уравнение обязательно будет иметь корень, равный 1. Чтобы уравнение получилось обязательно квадратным, нельзя называть 0, а чтобы корни были различными, отношение никаких двух чисел не должно равняться единице (так как второй корень равен c/a), то есть они должны быть попарно различны. Значит, можно назвать, например, числа 1, 2 и –3.

Литература

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Всероссийская олимпиада школьников по математике: Методическое пособие / Науч. ред. Э.М. Никитин. – М.: АПК и ППРО, 2005. – 140 с.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. – М.: Изд-во МФТИ, 2003. – 224 с.
3. Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М. Школьные математические олимпиады. – М.: Дрофа, 1999. – 128 с.
4. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М., 1975. – 112 с.
5. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 364с.
6. Бугаенко В.О. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. – М., 1995. – 110 с.
7. Бугулов Э.А., Толасов Б.А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. – Орджоникидзе, 1962. – 228 с.
8. Васильев Н.Б. и др. Заочные математические олимпиады. – М., 1986. – 176 с.
9. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
10. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.
11. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
12. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
13. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев и др. – М., 1986.
14. Зарубежные математические олимпиады. – М., 1987. – 416 с.
15. Каннель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О. Бугаенко. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.
16. Математика: Интеллектуальные марафоны, турниры, бои: 5-11 классы: Кн. для учителя. – М.: Изд-во «Первое сентября», 2003. – 256 с.

17. Математические олимпиады школьников: Кн. для учащихся общеобразовательных учреждений / Н.Х. Агаханов и др. – М., 1997.
18. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. – М., 1967.
19. Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.
20. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Р.М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.
21. Московские математические регаты / Сост. А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007. – 360 с.
22. Рожков В.И. и др. Сборник задач математических олимпиад. – М., 1987.
23. Савин А.П. и др. Физико-математические олимпиады. Сборник. – М.: Знание, 1877. – 160 с.
24. Спивак А.В. Математический праздник. – М., 2004. – 288 с.
25. Спивак А.В. Математический праздник. Ч. III. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 128 с.
26. Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994. – 309 с.
27. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1992. – 383 с.

Ирина Олеговна
Соловьева

Практикум по решению олимпиадных задач по математике

Учебное пособие

Издательская лицензия ИД № 06024 от 09.10.2001 года.
Подписано в печать 15.04.2010. Формат 60x90/16.
Объём издания в усл. печ. л. 6,0 Тираж 100 экз. Заказ № 56.

Псковский государственный педагогический университет им. С.М. Кирова,
180760, г. Псков, пл. Ленина, 2.
Редакционно-издательский отдел ПГПУ им. С.М. Кирова,
180760, г. Псков, ул. Советская, 21, телефон 72-74-62.
E-mail: rio@psksu.ru