Олимпиада школьная

задача 1 :

Докажите, что уравнение  x4– 4x3 + 12x2 – 24 x +24 = 0  не имеет решений.

Задача 2 :

Докажите, что в ходе любого сыгранного футбольного матча был момент, когда одна из команд забила голов столько же, сколько другой осталось забить.

Задача 3 :

Хорда удалена от центра окружности на расстояние  ***h***. В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписан квадрат так, что пара его соседних вершин лежит на хорде, а другая пара соседних вершин – на соответствующей дуге окружности.
Найдите разность длин сторон квадратов.

Задача 4 :

Найдите многочлен с целочисленными коэффициентами, корнем которого является число
√2 + √3.

Задача 5 :

Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д.
Чему равен 2005-й член этой последовательности?

Решение задач :

Задача 1 :

Уравнение x4 – 4x3 + 12x2 – 24x + 24 = 0  преобразовать к виду (x2 – 2x)2 + 8(x – 1,5)2 + 6 = 0,
которое не имеет решений.

Задача 2 :

Пусть первая из команд забила за весь матч *m* голов, вторая n голов.
Сумма числа голов в ходе матча изменяется с шагом 1 от 0 до *m* + *n* , значит, в какой-то момент она будет равна *m*.
Данный момент и будет искомым в задаче, потому что при этом число голов, уже забитых второй командой,
равно разности *m* и числа голов, уже забитой первой командой, т. е. числу голов,
которое еще предстоит забить первой команде.
Аналогично можно рассуждать и с первой командой.

Задача 3 :

Обозначим длины сторон большого и малого квадратов через 2*х* и 2*у* соответственно, радиус окружности – через R*.* Тогда расстояния от центра окружности до вершин вписанных квадратов, лежащих на окружности дают выражения
(2 – h)2 + x2 = R2,   (2y + h)2 + y2 = R2.
Отсюда получим x - y = (4/5)h.  Тогда, разность длин сторон квадратов будет равна (8/5)h.

Задача 4 :

Обозначим **√2 + √3 =a**. Тогда a2 = 5 + 2**√6**, а  (a2 – 5)2 = (2**√**6)2или a4 – 10a2 + 25 = 24,
которое равносильно a4 – 10a2 + 1 = 0.
А это и означает, что а является корнем многочлена
 x4 – 10x2 + 1.

Задача 5 :



Решение задач :

Задача № 1 :

Ответ: -8; 6.

Задача № 2 :

Построим на АВ как на диаметр окружность и проведем через А и В две прямые, перпендикулярные отрезку АВ. Точка С может находится между этими прямыми вне круга.

Задача № 3 :

Пусть натуральные числа имеют вид x•10000 + 2006, где x € N.
После вычеркивания последних цифр получим число x.
По условию, где n € N. Отсюда имеем, что должно быть натуральным числом, т. е. x - делитель числа 2006.
Число 2006 имеет делители: 1; 2; 17; 34; 59; 118; 2006.
Следовательно, имеются числа, отвечающие условию задачи:
12006; 22006; 172006; 342006; 592006; 1182006; 20062006.

Задача № 4 :

Так как a<>0,то, разделив обе части исходного уравнения на *a*, получим a + 1/a = 1.
Заметим, что *a*3 + 1 = 0, т. к. *a*3 + 1 = (*a* + 1)(*a*2 – *a* + 1).
Таким образом, *a*3 = -1. Тогда a2006 + 1/a2006 = (a3)6682 = a2 +1/a2 = - 1.

Задача № 5 :

Замечаем, что при каждом разрезании из одного листка получаем пять, т. е. число листков увеличивается на 4. Следовательно, из исходного листа может получиться число листков вида 1 + 4*n*, где n € N,
т. е. это число при делении на 4 дает остаток 1. Но 2006 = 4•501 + 2.
Следовательно, 2006 листков получиться не может.



**ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ 10 КЛАСС С РЕШЕНИЕМ.**

Задача № 1 :

Решите уравнение:

(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = 1320.

Задача № 2 :

На плоскости дан отрезок АВ.
Где может быть расположена точка С, чтобы угол АВС был остроугольным?

Задача № 3 :

Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006,
которые после зачеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

Задача № 4 :

Вычислить сумму a2006 + 1/a2006, если *a*2– *a* + 1 = 0.

Задача № 5:

Лист бумаги разрезали на 5 частей, некоторые из этих частей разрезали на 5 частей, и т. д.
Может ли за некоторое число разрезаний получиться 2006 листка бумаги?



Решение задач :

Задача № 1 :

Ответ: -8; 6.

Задача № 2 :

Построим на АВ как на диаметр окружность и проведем через А и В две прямые, перпендикулярные отрезку АВ.
Точка С может находится между этими прямыми вне круга.

Задача № 3 :

Пусть натуральные числа имеют вид x•10000 + 2006, где x € N. После вычеркивания последних цифр получим число x.
По условию, где n € N. Отсюда имеем, что должно быть натуральным числом, т. е. x - делитель числа 2006.
Число 2006 имеет делители: 1; 2; 17; 34; 59; 118; 2006.
Следовательно, имеются числа, отвечающие условию задачи: 12006; 22006; 172006; 342006; 592006; 1182006; 20062006.

Задача № 4 :

Так как a0, то, разделив обе части исходного уравнения на *a*, получим a + 1/a = 1.
Заметим, что *a*3 + 1 = 0, т. к. *a*3 + 1 = (*a* + 1)(*a*2 – *a* + 1).
Таким образом, *a*3 = -1. Тогда a2006 + 1/a2006 = (a3)6682 = a2 + 1/a2 = - 1.

Задача № 5 :

Замечаем, что при каждом разрезании из одного листка получаем пять, т. е. число листков увеличивается на 4.
Следовательно, из исходного листа может получиться число листков вида 1 + 4*n*, где n € N,
т. е. это число при делении на 4 дает остаток 1.
Но 2006 = 4•501 + 2. Следовательно, 2006 листков получиться не может.

**ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 11 КЛАСС.**

Задача

Решите уравнение:

(*x*3 – 2)(2sin*x* – 1) + (2*x*3 – 4) sin *x* = 0.

Решение

Из того, что функция *y =*2*t*возрастает, следует:

1) Если *sin x*0,     то     2*sin x -*10;
если *sin x  0 ,     то      2sin x - 1  0 .

2) Если x3 - 2  0 ,     то     2x3 - 4  0 ;
если x3 - 2  0 ,     то      2x3 - 4  0 ;

Следовательно, если
(x3 - 2)(2sin x - 1)  0 ,     то     (2x3 - 4) sin x  0 ;
если (x3-2)(2sin x - 1)  0 ,     то     (2x3 - 4) sin x  0 ;

то есть знаки выражений

(x3 - 2)(2sin x - 1) и (2x3 - 4) sin x совпадают.

Поэтому, каждое слагаемое в левой части уравнения должно обращаться в нуль,
то есть данное уравнение равносильно совокупности:

x3 = 2 или sin x = 0 .*

*Ответ*

*{} U {πn | n  Z.}.*

**

*Задача 1 :

Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.

Задача 2 :

Решите уравнение     sin44x + cos2x = 2sin4x х cos4x.

Задача 3 :

Существует ли многогранник с нечетным числом граней, каждая из которых есть многоугольник с нечетным числом сторон?

Задача 4 :

Докажите, что касательные к гиперболе y = 1/x образуют с осями координат треугольники одной и той же площади.

Задача 5 :

В каждую клетку квадратной таблицы 25 x 25 вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.*

**

*Решение задач :*

 *Задача 1 :*

*Пусть это 4 последовательных числа: n, n + 1, n + 2, n  + 3.
Тогда n (n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = ( 2   + 3n)(n2 + 3n + 2) + 1 = (n2  + 3n)2+ 2(n2  + 3n) + 1 = (n2  + 3n + 1)2.

Задача 2 :

Перенесем в левую часть  2sin4x · cos4x и прибавим и вычтем по cos8x.
В результате полученное уравнение можно преобразовать к виду
(sin4x – cos4x)2 + cos2x(1 – cos6x) = 0,
которое равносильно следующей системе:

*

*Решая второе уравнение и подставляя его решения в первое уравнение, в результате получим решение исходного уравнения x = π/2 + πk .

Задача 3 :

Пусть такой многогранник существует. Обозначим за 1, 2, …, число ребер на гранях, тогда 1 + 2+ … – удвоенная сумма всех ребер многогранника, она – четная. А в левой части стоит нечетная сумма слагаемых, каждое из которых – нечетно. Получили противоречие. Значит, такого многогранника не существует.

Задача 4 :

Составим уравнение касательных к гиперболе в точке*

*Т. к. (1/x)' = -1/(x2), то эти уравнения будут иметь вид y = -1/(х02)(x - х0) + 1/х0.

Касательная с уравнением пересекает ось абсцисс в точке (х1;0);
  х1 можно определить из уравнения -1/(х02)(x - х0) + 1/х0= 0.
Решая данное уравнение, получим х1 = 2х0.
Точка (0; y1) пересечения с осью ординат определяется подстановкой в уравнение значения х = 0.
В итоге получим y2 = 2/х0.
Отрезки осей координат и касательной составляют прямоугольный треугольник, катеты которого имеют длины  а = 2|х0| и b = 2 / |х0|. Площадь данного треугольника равна 2.

Задача 5 :

Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек.
Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений,
в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т. е. равно 1.
А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50).
Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно - 1,
т. е. слагаемых с - 1 должно быть нечетное число.
А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.*