11 класс школьный уровень

Часть 1

1. Сколько существует шестизначных натуральных чисел,
у которых сумма первых двух цифр равна сумме двух последних цифр?

**2.** В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *ВС*
угол *А* — прямой, *Е* — точка пересечения диагоналей, точка *F* — проекция *Е* на строну *АВ*.
Докажите, что углы *DFE* и *CFE* равны.

**3.** Найти все пары натуральных чисел *х* и *у*, удовлетворяющих уравнению *х2 = у2 + 77*.

**4.** Доску размера *100* на *100* клеток, раскрашенную в шахматном порядке,
произвольным образом разрезали по линиям сетки на квадраты со сторонами нечётной длины.
В каждом квадрате отметили центральную клетку.
Доказать, что среди отмеченных клеток поровну чёрных и белых.

**5.** Перед боем у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов.
Василий Иванович израсходовал в бою в *8* раз меньше патронов, чем Петька,
а осталось у него в *9* раз больше патронов, чем у Петьки.
Доказать, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на *71*.

Часть 2

**1.** Некоторую работу могут выполнить трое рабочих.
Второй и третий могут вместе выполнить ее в два раза быстрее первого.
Первый и третий могут вместе выполнить ее в три раза быстрее второго.
Во сколько раз первый и второй могут выполнить работу быстрее, чем третий.

**2.** Две окружности пересекаются в точках ***М***и ***N***.
Общая касательная этих окружностей касается их в точках ***А*** и ***В***. Доказать, что

*** ANB +  AMB = 180°***.

**3.** Решить числовой ребус (одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, разным — разные):

***ABCD=EEFF***.

**4.** В институте работает *100* человек.
Известно, что из любых четверых можно выбрать одного, который знаком с тремя остальными.
Доказать, хотя бы один человек в институте знаком со всеми остальными

**5.** В правильном *n* - угольнике проведены все диагонали.
На всех сторонах и диагоналях поставлено по стрелке (например, как это сделано на рисунке).
Для любого ли *n* можно, так расставить стрелки, чтобы, начав движение с одной из вершин, невозможно было вновь вернуться в нее, двигаясь по сторонам и диагоналям только в направлениях, указанных стрелками.

Часть 3

**1.** Докажите, что являются точными квадратами все числа вида *16,* *1156,* *111556* и т.д.
(в середину предыдущего числа вставляется число *15*).

**2.** В пруд пустили *30* щук, которые постепенно поедали друг друга.
Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных).
Каково наибольшее число щук, которые могут почувствовать себя сытыми за достаточно большой промежуток времени?

**3.** Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве: *АХА = БАХ*.

**4.** Двое пишут *30*-значное число, употребляя только цифры *1, 2, 3, 4, 5.*
Первую цифру пишет первый, вторую --- второй, третью --- первый и т.д.
Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на *9,* если первый стремится ему помешать?

**5.** Дан угол в *19*о. Построить циркулем угол в *1*о.

**6.** Можно ли замостить шашечную доску *10 х 10* плитками *4 х 1?*

Задачи с решением :

Задача 1.

Условие

Существует ли такой момент, когда часовая, минутная и секундная стрелки образуют попарно углы в 120°?

Решение

Будем отмерять время от полудня.
Предположим, что t < 12 ч - нужный момент времени.
Нетрудно понять, что тогда в момент времени 3t все три стрелки совместятся друг с другом.
Угол между направлениями совмещения часовой и минутной стрелок составляет 1/11 полного оборота;
минутной и секундной стрелок - 1/59 полного оборота. Числа 11 и 59 - взаимно простые.
Поэтому все три стрелки совмещаются только в начале отсчёта.
Тем самым 3t - это 12 или 24 часа. Тогда t - это 4 или 8 часов.
Однако в эти моменты времени минутная и секундная стрелки совмещаются, а не образуют угол в 120°.
Поэтому искомого момента времени не существует.

Задача 2.

Условие

Составить две прогрессии: арифметическую и геометрическую, каждую из четырёх членов; при этом, если сложить одноимённые члены обеих прогрессий, то должны получиться числа: 27, 27, 39, 87.

Решение.

Пусть a, a + d, a + 2d, a + 3d — искомая арифметическая прогрессия, b, bq, bq2, bq3 — искомая геометрическая прогрессия. По условию

a + b = 27,

a + d + bq = 27,

a + 2d + bq2 = 39,

a + 3d + bq3 = 87.

Вычтем из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвёртого третье:

d + b(q - 1) = 0,

d + bq(q - 1) = 12,

d + bq2(q - 1) = 48.

Из первого уравнения получаем b(q - 1) = - d; подставим это выражение во второе и третье уравнения:

d - dq = 12,

d - dq2 = 48.

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим q = 3. Следовательно, d = - 6, b = 3 и a = 24.
Таким образом, искомые прогрессии — это
24, 18, 12, 6;

3, 9, 27, 81.