Задачи олимпиад. 9 класс. С решением.

Задача № 1 :  
  
Найдите *x* + *y*, если   
Form-1.gif  
  
Задача № 2 :  
  
На единичном отрезке расположено несколько непересекающихся отрезков красного цвета, общая длина которых больше 0,5. Обязательно ли найдутся две красные точки на расстоянии:  
Form-2.gif  
  
Задача № 3 :  
  
В телевизионной передаче “Поле чудес” ведущий разыгрывал приз следующим образом.  
Играющему показывали три шкатулки, в одной из которых находился приз.  
Играющий указывал на одну из шкатулок, после чего ведущий открывал одну из двух других оставшихся шкатулок, которая оказывалась пустой.  
После этого играющий мог либо настаивать на первоначальном выборе, либо сменить его и выбрать третью шкатулку.  
В каком случае его шансы на выигрыш возрастают?  
(Возможны три варианта ответа: обе шкатулки равноправны, лучше сохранить первоначальный выбор, лучше его изменить. Попытайтесь обосновать свой ответ.)  
  
Задача № 4 :  
  
Найдите наименьшее натуральное *n* такое, что при всех целых *m > n* найдутся целые положительные *x* и *y*, для которых имеет место равенство   
17*x* + 23*y* = *m*.  
  
Задача № 5 :  
  
Угол *А* в треугольнике *АВС* равен . Окружность, проходящая через *А* и *В* и касающаяся *ВС* , пересекает медиану к стороне *ВС* (или ее продолжение) в точке *М*, отличной от *А*. Найдите угол *ВМС*.  
  
Задача № 6 :  
  
При всех допустимых значениях *a*и *b* упростите выражение  
http://www.5egena5.ru/images1/Form-3.gif  
  
Задача № 7 :  
  
На прямой *l* расположены точки *А*, *B*, *C* и *D* так, что  
http://www.5egena5.ru/images1/Form-6.gif  
Некоторая окружность касается прямой *l* в точке *С*.   
Через *A* проведена прямая, пересекающая эту окружность в точках *M* и *N* таких,  
что серединные перпендикуляры к отрезкам *BM* и *DN* пересекаются в точке *Q* на прямой *l*.  
В каком отношении точка *Q* делит отрезок *AD*?  
  
Задача № 8 :  
  
На плоскости даны прямая *l* и луч *p* с началом на этой прямой.  
Построены две фиксированные окружности (не обязательно равные), вписанные в два образовавшихся угла.  
На луче *p* берется точка *А* так, что касательные из *А* к заданным окружностям, отличные от *p*,  
пересекают прямую *l* в точках *В* и *С* и при этом треугольник *АВС* содержит заданные окружности.  
Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольник *АВС* (при перемещении *А*).  
  
Задача № 9 :  
  
На плоскости расположены два равнобедренных не пересекающихся прямоугольных треугольника  
*ABC* и *DEC* (*AB* и *DE* – гипотенузы, *АВDЕ* – выпуклый четырехугольник), причем *AB* = 2 *DE*.  
Построим еще два равнобедренных прямоугольных треугольника: *BDF* (с гипотенузой *BF*,  
расположенной вне треугольника *BDC*) и *AEG* (с гипотенузой *AG*, расположенной вне треугольника *AEC*).  
Докажите, что прямая *FG* проходит через точку *N* такую, что *DCEN* – квадрат.  
  
Задача № 10 :  
  
Школьник написал домашнее сочинение на тему «Как я провел лето».  
Два его товарища из соседней школы решили не утруждать себя работой и переписали его сочинение.  
Но при переписывании они сделали несколько ошибок – каждый свои.  
Прежде чем сдать работы, оба школьника дали переписать сочинения четырем другим своим товарищам  
(каждый дал двум знакомым).  
Эти четыре школьника делают то же самое и т.д.  
При каждом переписывании сохраняются все предыдущие ошибки и, возможно, делаются новые.  
Известно, что в какой-то день в каждом новом сочинении оказалось не менее 10 ошибок.  
Докажите, что был такой день, когда в сумме было допущено не менее 11 новых ошибок.

1.  
Целые числа *a*, *b*, *c* и *d* удовлетворяют равенству *a*2 + *b*2 + *c*2 = *d*2. Доказать, что число *abc* делится на 4.

Решение.  
  
Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа дает при делении на 4 остаток 1.  
Если числа *a, b, c* — нечетные, то *d*2 должен давать при делении на 4 остаток 3, что невозможно.  
Если среди чисел *a, b, c* два нечетных и одно четное, то *d*2 должен давать при делении на 4 остаток 2,  
что также невозможно.  
Значит, среди чисел *a, b, c* есть два четных числа, откуда произведение *abc* делится на 4.  
Такое возможно, например, 32 + 42 + 122 = 132.

2.   
Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании  
(если A знаком с B, то и B знаком с A).

Решение.  
  
Пусть в компании *k* человек. Тогда каждый человек может иметь от нуля до (*k* – 1) знакомых.  
Предположим противное: количество знакомых у всех разное.  
Тогда найдется человек без знакомых, найдется человек с одним знакомым, и так далее,  
наконец, найдется человек, у которого (*k* – 1) знакомых.  
Но тогда этот последний знаком со всеми, в том числе и с первым.  
Но тогда у первого не может быть ноль знакомых. Получили противоречие.

3.   
Можно ли представить дробь 2/7 в виде суммы двух дробей, числители которых равны 1,  
а знаменатели — различные целые числа?

Решение.  
  
*Ответ*: можно.

Например, 2/7 = 1/4 + 1/28.

**4.**  
Доказать, что для любых положительных чисел *a* и *b* выполняется неравенство

http://www.5egena5.ru/images1/100.gif

Р е ш е н и е.  
  
Сделаем замену *x* = *b*1/15, *y* = *a*1/10. Тогда доказываемое неравенство приобретает вид

2*y*5 + 3*x*5 ? 5*y*2*x*3.

Деля на *y*5 и обозначая *t* = *x*/*y*, получаем 3*t*5 – 5*t*3 + 2 ? 0.  
Разложим левую часть на множители. Последовательно получаем

*f*(*t*) = (3*t* 5 – 3*t* 3) – (2*t* 3 – 2) ? 0,

3*t* 3(*t* 2 – 1) – 2(*t* – 1)(*t* 2 + *t* + 1) ? 0,

(*t* – 1)(3*t* 3(*t* + 1) – 2(*t* 2 + *t* + 1)) ? 0,

(*t* – 1)(3*t* 4 + 3*t* 3 – 2*t* 2 – 2*t* – 2) ? 0,

(*t* – 1)((2*t* 4 – 2*t* 2) + (*t* 4 – *t*) + (*t* 3 – *t*) + (2*t* 3 – 2)) ? 0

(*t* – 1)(2*t* 2(*t* 2 – 1) + *t*(*t* 3 – 1) + *t*(*t* 2 – 1) + 2(*t* 3 – 1)) ? 0,

(*t* – 1)2(2*t* 2(*t* + 1) + *t*(*t* 2 + *t* + 1) + *t*(*t* + 1) + 2(*t* 2 + *t* + 1)) ? 0,

(*t* – 1)2(3*t* 3 + 6*t* 2 + 4*t* + 2) ? 0.

Для *t* > 0 выражение в первой скобке ? 0, во второй скобке > 0. В итоге, *f*(*t*) ? 0 для всех *t* > 0.  
Равенство нулю достигается лишь при *t* = 1, т.е. при *x* = *y*, т.е. при *a*3 = *b*2. ?

**5.**  
На основаниях *AB* и *CD* трапеции *ABCD* взяты точки *K* и *L*.  
Пусть *E* – точка пересечения отрезков *AL* и *DK*, *F* – точка пересечения *BL* и *CK*.  
Доказать, что сумма площадей треугольников D*ADE* и D*BCF* равна площади четырёхугольника *EKFL*.

Р е ш е н и е.

Имеем *S*D*ADK* = *S*D*ALK*, так как они имеют общее основание *AK* и равные высоты, совпадающие с расстоянием между параллельными прямыми *AB* и *DC*.  
*S*D*ADE* = *S*D*ADK* – *S*D*AEK* = *S*D*ALK* – *S*D*AEK* = *S*D*KLE*.  
Аналогично, *S*D*BCF* = *S*D*KLF*.  
Таким образом, сумма площадей треугольников D*ADE* и D*BCF* равна площади четырёхугольника *EKFL*.