Олимпиада школьная 9 класс

Задача 1 :

Все трехзначные числа записаны в ряд: 100 101 102 ..... 998 999.
Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?

Задача 2 :

По определению, n ! = 1 х 2 х 3 ? х............х n .
Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения 1! х 2! х 3! х ............х 20! ,
чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

Задача 3 :

С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.

Задача 4 :

Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20.

Задача 5 :

На столе лежат 2005 монет.
Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй любое четное число монет от 2 до 100.
Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
Кто выиграет при правильной игре?

Решение задач :

Задача 1 :

Так как трехзначное число не может начинаться с нуля,
то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда.
Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа.
Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа,
т.е. это число оканчивается на 20.
Таких чисел 9: 120, 220, .........., 920.
Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен,
то соответствующее трехзначное число начинается на 20.
Таких чисел 10: 200, 201, .........., 209.
Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.

Задача 2 :

Заметим, что
1! х 2! х 3! х 4! х.......х 20! = (1! х 2!) х (3! х 4!) х..........х (19! х 20!) =
= (1! х 1! х 2) х (3! х 3! х 4) х (5! х 5! х 6) х...........х (17! х 17! х 18) х (19! х 19! х 20) =
= (1!)2 х (3!)2 х (5!)2 х............х (19!)2 х (2 х 4 х 6 х 8 х...........х 18 х 20) =
= (1!)2 х (3!)2 х (5!)2 х.............х (19!)2 ?х (2 х (2 х 2) х (3 х 2) х..............х (10 х 2)) =
= (1! х 3! х............х 19!)2 х 210 х (1 х 2 х 3 х...............х 2 х 10) = (1! х 3! х..............х 19!)2 (25)2 х 10!
Мы видим, что первые два множителя квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат.
Легко видеть, что вычеркивание других множителей, указанных в ответах, не дает желаемого результата. Ответ: 10!

Задача 3 :

Задача имеет множество решений.
Рассмотрим один из них.
Выберем на сторонах угла произвольно по 2 точки: A, N, B, M и рассмотрим треугольники АВС и NМС.
Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов.
Точка пересечения биссектрис углов треугольника АВС принадлежит и биссектрисе угла С.
Аналогично, точка пересечения 2 биссектрис углов треугольника NМС также лежит на биссектрисе угла С.
Проводим через эти 2 точки прямую, которая будет и биссектрисой х С.

Задача 4 :

Есть только один треугольник, в котором угол 20 град. лежит между сторонами 5 см и 6 см.
Попробуем построить треугольник,
в котором сторона 6 см прилегает к углу 20 град. , а сторона 5 см лежит против него.
Для этого от вершины угла отложим отрезок длиной 6 см, и проведем окружность радиуса 5 см с центром этого отрезка, не совпадающем с вершиной.
Расстояние от центра этой окружность до второй стороны угла меньше 5 см
(это расстояние равно катету угла в 20 град.).
Отсюда следует, что окружность пересечет прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках,
причем из-за того что радиус меньше 6 см, обе эти точки будут лежать на стороне угла,
и мы получим два разных треугольника.
Если же попробовать поменять ролями отрезки в 5 см и 6 см,
то вершина угла окажется внутри построенной окружности,
и мы получим только одну точку пересечения,
а следовательно, и один треугольник.
Итак, мы получили всего 4 треугольника.

Задача 5 :

Опишем стратегию первого игрока.
Первым ходом он должен взять со стола 85 монет.
Каждым следующим, если второй игрок берет х монет, то первый игрок должен взять 101 х монет
(он всегда может это сделать, потому что если х четное число от 2 до 100, то (101 х ) нечетное число от 1 до 99).
Так как 2005 = 101 х 19 + 85 + 1, то через 19 таких ответов после хода первого на столе останется 1 монета,
и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.