Школьная олимпиада 8 класс

Задача № 1:

Сумма квадратов n простых чисел, каждое из которых больше 5, делится на 6. Докажите что и n делится на 6.

**Решение.**
Если сумма нескольких чисел делится на шесть,
то и сумма их остатков при делении на шесть тоже будет делится на 6.
Простое число, большее пяти, может иметь при делении на 6 только остатки 1 или 5
(иначе это число будет делиться на 2 или 3).
Следовательно, квадрат любого простого числа, большего чем 5, имеет при делении на 6 остаток 1.
Так как сумма этих остатков равна количеству чисел n, значит n делится на 6.

Задача № 2:

Петя и Вася сделали в тире по 5 выстрелов.
Первыми тремя выстрелами они выбили поровну, а последними тремя Петя выбил в три раза больше очков, чем Вася. На мишени остались пробоины в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очков. Куда попал каждый из них третьим выстрелом?
Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

**Ответ.** Третьим выстрелом Петя выбил 10, а Вася - 2 очка.

**Решение.**
Последними тремя выстрелами Вася не мог выбить больше, чем 9 очков
(иначе Петя бы выбил последними тремя выстрелами не меньше 30).
Меньше 9 очков Вася тоже выбить не мог, так как наименьшая сумма за три выстрела 2 + 3 + 4 = 9.
Следовательно, Вася выбил 2, 3 и 4 очка а Петя 10, 9 и 8 очков
(других вариантов набрать 27 очков тремя выстрелами нет).
Значит первыми двумя выстрелами мальчики выбили 9, 8, 5 и 4 очка.
При этом Петя третьим выстрелом выбил не меньше, чем 8, а Вася - не больше, чем 4 очка.
Так как сумма очков после первых трех выстрелов была равной,
значит, первыми двумя выстрелами Петя выбил по крайней мере на четыре очка меньше, чем Вася.
Единственная возможность - Вася выбил 9 и 8, а Петя 5 и 4 очка,
следовательно, третьим выстрелом Вася выбил 2, а Петя 10 очков.

Задача № 3:

Если дату 10 февраля 2001 года записать в виде 10.02.2001, а затем убрать точки,
то получится палиндром (т.е. число, читающееся слева направо и справа налево одинаково).
Найдите ближайшую к 10.02.2001 дату, обладающую тем же свойством. Рассмотрите два случая:
1) требуемая дата еще не наступила,
2) требуемая дата уже прошла.
Ответ обосновать.

**Ответ.**
1) 20 февраля 2002
2) 29 ноября 1192 года.

**Решение.**
Заметим, что при условии, что дата записывается как палиндром,
день и месяц однозначно находятся по заданному году.

(1): в 2001 году других палиндромов быть не может,
а в следующем (2002) году это должен быть 20 день второго месяца.

(2): Чтобы дата была как можно ближе к 2001 году, необходимо брать самый большой возможный год, меньший 2001. Вторая цифра года должна быть первой цифрой месяца, то есть 0 или 1, т.к. месяцев не больше 12.
В 2000 году палиндрома быть не может (нулевого дня не бывает),
следовательно, первые две цифры года - 11 (соответственно, месяц - ноябрь).
Третью цифру года нужно взять максимально возможную, т.е. девять, тогда четвертой
(так как в ноябре не больше 31 дня) может быть два.
Получится дата-палиндром 29.11.1192.

Задача № 4:

В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны AB и CD параллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что AD + BC = AB + CD.

**Решение.**
Впишем четырехугольник ABCD в прямоугольник EFGH со сторонами,
параллельными диагоналям (EF AC и EH BD) - смотри рисунок.
Пусть L - точка пересечения прямых DC и EF, а M - точка на прямой HG такая, что LM FG.
Тогда ABLC - параллелограмм, следовательно, AB = CL.
Так как GM = FL = EB = HD и AH = CG, то треуг-к AHD = треуг-ку CGM ,
следовательно, AD = CM. BC + CM = BC + AD .
Но BM = DL как диагонали прямоугольника BLDM, и DL = DC + CL = DC + AB.
Следовательно, AD + BC = DL = DC + CL = DC + AB, что и требовалось доказать.

