Школьная олимпиада 8 класс

Задача № 1:  
  
Сумма квадратов n простых чисел, каждое из которых больше 5, делится на 6. Докажите что и n делится на 6.

**Решение.**  
Если сумма нескольких чисел делится на шесть,  
то и сумма их остатков при делении на шесть тоже будет делится на 6.  
Простое число, большее пяти, может иметь при делении на 6 только остатки 1 или 5  
(иначе это число будет делиться на 2 или 3).  
Следовательно, квадрат любого простого числа, большего чем 5, имеет при делении на 6 остаток 1.  
Так как сумма этих остатков равна количеству чисел n, значит n делится на 6.

Задача № 2:

Петя и Вася сделали в тире по 5 выстрелов.  
Первыми тремя выстрелами они выбили поровну, а последними тремя Петя выбил в три раза больше очков, чем Вася. На мишени остались пробоины в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очков. Куда попал каждый из них третьим выстрелом?  
Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

**Ответ.** Третьим выстрелом Петя выбил 10, а Вася - 2 очка.

**Решение.**  
Последними тремя выстрелами Вася не мог выбить больше, чем 9 очков  
(иначе Петя бы выбил последними тремя выстрелами не меньше 30).  
Меньше 9 очков Вася тоже выбить не мог, так как наименьшая сумма за три выстрела 2 + 3 + 4 = 9.  
Следовательно, Вася выбил 2, 3 и 4 очка а Петя 10, 9 и 8 очков  
(других вариантов набрать 27 очков тремя выстрелами нет).  
Значит первыми двумя выстрелами мальчики выбили 9, 8, 5 и 4 очка.  
При этом Петя третьим выстрелом выбил не меньше, чем 8, а Вася - не больше, чем 4 очка.  
Так как сумма очков после первых трех выстрелов была равной,  
значит, первыми двумя выстрелами Петя выбил по крайней мере на четыре очка меньше, чем Вася.  
Единственная возможность - Вася выбил 9 и 8, а Петя 5 и 4 очка,  
следовательно, третьим выстрелом Вася выбил 2, а Петя 10 очков.

Задача № 3:

Если дату 10 февраля 2001 года записать в виде 10.02.2001, а затем убрать точки,  
то получится палиндром (т.е. число, читающееся слева направо и справа налево одинаково).  
Найдите ближайшую к 10.02.2001 дату, обладающую тем же свойством. Рассмотрите два случая:   
1) требуемая дата еще не наступила,  
2) требуемая дата уже прошла.  
Ответ обосновать.

**Ответ.**   
1) 20 февраля 2002  
2) 29 ноября 1192 года.  
  
**Решение.**   
Заметим, что при условии, что дата записывается как палиндром,  
день и месяц однозначно находятся по заданному году.

(1): в 2001 году других палиндромов быть не может,  
а в следующем (2002) году это должен быть 20 день второго месяца.

(2): Чтобы дата была как можно ближе к 2001 году, необходимо брать самый большой возможный год, меньший 2001. Вторая цифра года должна быть первой цифрой месяца, то есть 0 или 1, т.к. месяцев не больше 12.  
В 2000 году палиндрома быть не может (нулевого дня не бывает),  
следовательно, первые две цифры года - 11 (соответственно, месяц - ноябрь).  
Третью цифру года нужно взять максимально возможную, т.е. девять, тогда четвертой  
(так как в ноябре не больше 31 дня) может быть два.  
Получится дата-палиндром 29.11.1192.

Задача № 4:

В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны AB и CD параллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что AD + BC = AB + CD.

**Решение.**   
Впишем четырехугольник ABCD в прямоугольник EFGH со сторонами,  
параллельными диагоналям (EF AC и EH BD) - смотри рисунок.  
Пусть L - точка пересечения прямых DC и EF, а M - точка на прямой HG такая, что LM FG.  
Тогда ABLC - параллелограмм, следовательно, AB = CL.  
Так как GM = FL = EB = HD и AH = CG, то треуг-к AHD = треуг-ку CGM ,  
следовательно, AD = CM. BC + CM = BC + AD .  
Но BM = DL как диагонали прямоугольника BLDM, и DL = DC + CL = DC + AB.  
Следовательно, AD + BC = DL = DC + CL = DC + AB, что и требовалось доказать.

