**Задания**

 **для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике,**

**11 класс, 2016-2017 учебный год**

1. Решите систему уравнений:

 (*x*+*y*)(*x*+*y*+*z*)=72,

(*y*+*z*)(*x*+*y*+*z*)=120,

(*x*+*z*)(*x*+*y*+*z*)=96.

2. На доске написано число 543254325432.Некоторые цифры стерли так, чтобы

получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

3. По дороге едут велосипедисты: на запад – Вася и Петя с равными между собой скоростями, а на восток – Коля и Миша с равными между собой скоростями. Вася встретился с Мишей в 12.00, Петя с Мишей – в 15.00, Вася с Колей – в 14.00. Когда встретились Петя с Колей?

4. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите

наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах $A$ и $B$ прямые, величина угла при вершине $D$ равна $\frac{π}{4}$, $BC=1$, длина диагонали $BD=5$. Найти площадь этого четырехугольника.

Решения

1. Решение:

Сложив все три уравнения системы, получим уравнение (х+у+z)(2x+2y+2z)=288, из которого найдем х+у+z=12 или х+у+z= - 12. Подставляя вместо х+у+z числа 12 и -12, получим в первом случае: x=2,y=4,z=6, а во втором: x= -2,y= -4,z= -6.

 Ответ: (2;4;6),(-2;-4;-6).

2. Ответ. 5435432532. Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

3. Ответ. в 17.00.

Решение. Расстояние между Мишей и Колей и их скорости не меняются, а скорости

Васи и Пети равны. Вася встретил Колю через 2 часа после Миши, значит, Петя встретят

Колю тоже через 2 часа после Миши, т. е. в 17.00.

4. Ответ. 105.

Решение.

Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти

наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105.

Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

5. Обозначим угол $BDC$ через $α$. Так как сумма внутренних углов любого четырехугольника равна $2π$, а три угла четырехугольника $ABCD$ известны по условию задачи, то $∠С=\frac{3π}{4}$. Рассмотрим треугольник $BDC$. Введем обозначение CD=x, тогда по теореме косинусов получим уравнение

$25=1+x^{2}-2∙1∙x∙cos135°$.

$$x^{2}+\sqrt{2}x-24=0.$$

Единственный положительный корень этого уравнения есть $x=3\sqrt{2}$.

Выполним дополнительное построение: опустим из вершины С перпендикуляр $CC\_{1}$ на AD.

Из прямоугольного треугольника $CC\_{1}D$ находим, что $CC\_{1}=C\_{1}D$. По теореме Пифагора находим $CC\_{1}=C\_{1}D=3$. Из прямоугольного треугольника BAD и очевидного равенства $BA=CC\_{1}$ следует, что $AD^{2}=BD^{2}-BA^{2}$. $AD=4$.

Так как по условию задачи углы А и B прямые, то AD||BC и четырехугольник ABCD – трапеция.

$S\_{тр}=\frac{BC+AD}{2}∙AB=\frac{15}{2}=7,5$*.*

Ответ: $7,5$

